Math. P.
195 gc

Math. P. 195 gc

Gugler

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

g.

Leitfaden

für den ersten Unterricht

in der

descriptiven Geometrie

von

Dr. Bernhard Gugler.

(Aus dem größern „Lehrbuch ꝛc.“ des Verfassers ausgehoben, vorzugsweise für den Gebrauch in Gewerbe-Schulen).

Mit 2 Kupfertafeln.

Nürnberg,
bei Johann Leonhard Schrag
1844.

44. B.

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Vorwort.

Bei Ausarbeitung seines „Lehrbuch's der descriptiven Geometrie" hatte der Verfasser theils solche Leser vor Augen, welche (genügend vorgebildet) durch Selbststudium sich mit jenem Zweige der Mathematik bekannt machen wollen; theils und hauptsächlich aber die Schüler höherer, namentlich polytechnischer Lehranstalten, an denen die einzelnen Unterrichtsfächer strengmethodisch und in größerem Umfange abgehandelt werden können. Doch fand das Buch auch an Gewerbschulen manchenFreund; man beschränkte sich dort entweder auf den ersten (von der Geraden und Ebene handelnden) Abschnitt; oder man wählte aus beiden Abschnitten das aus, was durch die nächsten Bedürfnisse des Gewerbschülers geboten schien, von der Ansicht ausgehend, daß denjenigen Schülern, welche nach durchlaufener Gewerbschule nicht an eine polytechnische Anstalt, sondern unmittelbar zu einem Berufe übertreten, gewisse auf krumme Flächen bezügliche Aufgaben (ihrer practischen Wichtigkeit wegen) nicht fremd bleiben sollten. Von dieser letztern Seite her wurde nun der Verfasser mehrfach angeregt, einen für den Handgebrauch des Gewerbschülers berechneten Auszug aus dem „Lehrbuche" zu geben; der Versuch, solchen Wünschen nachzukommen, liegt hier vor.

Von den im „Lehrbuche" enthaltenen Aufgaben über gerade Linien und Ebenen ist die Mehrzahl in den Auszug übergegangen, weil dieses Kapitel

mit Anfängern nie zu sorgfältig eingeübt werden kann; doch wurde der Grundsatz möglichster Oeconomie dabei nicht außer Acht gelassen. In Betreff der krummen Flächen schien es am rathsamsten, ausschließlich nur diejenigen Gattungen zur Sprache zu bringen, welche an den Gegenständen gewerblicher Thätigkeit am häufigsten vorkommen, während sie zugleich die leichteste theoretische Behandlung zulassen. Durch diese Beschränkung wurde es möglich, den ausgehobenen Lehrstoff zu einem für sich bestehenden Ganzen abzurunden, dessen Umfang das Pensum eines Jahres nicht übersteigt. Weitere Reductionen (falls zu solchen eine Schule durch äußere Gründe sich veranlaßt sehen sollte) wären nur im dritten Kapitel und etwa noch im fünften Kapitel anzubringen, wo nach dem Ermessen des Lehrers wohl einige Aufgaben unbeschadet des Nachfolgenden übergangen werden könnten.

Ausdrückliche Hinweisungen auf die unmittelbare Anwendung, welche diese oder jene Aufgabe im Gewerbsleben findet, würden in einem gedrängten Compendium nicht am Platze sein, sondern bleiben am besten dem mündlichen Vortrage vorbehalten.

Mit dem Wunsche, daß dieß kleine Buch seinem Zwecke entsprechend befunden werden möge, empfiehlt dasselbe zu wohlwollender Aufnahme

der Verfasser.

Inhalt.

Erstes Kapitel

Seite

§§. 1 — 2. Einleitung 1
§§. 3 — 19. Von der Darstellung des Puncts, der geraden Linie und Ebene 3

Zweites Kapitel

§§. 20 — 60. Lehrsätze und Aufgaben über gerade Linien und Ebenen 11

Drittes Kapitel

§§. 61 — 84. Polygone und Polyeder 32
§§. 61 — 66 A) Polygon-Projectionen 32
§§. 67 — 76 B) Polyeder-Projectionen 36
§§. 77 — 81 C) Schnitte der Polyeder durch Ebenen . 44
§§. 82 — 84 D) Schnitte der Polyeder unter sich . . 47

Viertes Kapitel

§§. 85 — 111. Darstellung krummer Linien und krummer Flächen 51
§§. 85 — 95 A) Von krummen Linien und ihren Projectionen 51
§§. 96 — 111 B) Erzeugung und graphische Darstellung krummer Flächen 62
§§. 97 — 100 Cylinderflächen 63
§§. 101 — 104 Kegelflächen 66
§§. 105 — 111 Drehungsflächen 69

Fünftes Kapitel

Seite

§§. 112 — 127. Berührung krummer Flächen durch gerade Linien und Ebenen 73

Sechstes Kapitel.

§§. 128 — 145. Schnitte krummer Flächen durch Linien, Ebenen und krumme Flächen 85

§§. 129 — 134 A) Ebene Schnitte krummer Flächen 85

§§. 135 — 145 B) Gegenseitiger Durchschnitt zweier krummen Flächen . 92

Erstes Kapitel.

Einleitung.

§. 1.

Fällt man von einem gegebenen Puncte A auf eine gegebene Ebene E eine Senkrechte L, so wird der Fußpunct a dieser Senkrechten die Orthogonal-Projection (oder auch schlechthin die Projection) des Punctes A auf die Ebene E genannt; diese Ebene selbst heißt die Projectionsebene oder Grundebene, und die Senkrechte L das Projectionsloth oder die projicirende Linie.

Die Projection eines Systems von Puncten auf eine Grundebene ist der Inbegriff der Projectionen aller einzelnen Puncte, und giebt ein geometrisches Bild dieses Systems.

Ein gegebenes System von Puncten oder irgend eine geometrische Gestalt auf eine gegebene Ebene in Projection zu legen (oder geometrisch abzubilden), macht einen Theil der Aufgabe aus, mit der sich die descriptive Geometrie (darstellende Geometrie, beschreibende Geometrie) beschäftigt. Außerdem aber lehrt dieser Zweig der Mathematik, wie man aus den gegebenen Projectionen verschiedener Raumgrößen die Beziehungen auffindet, in denen diese Größen selbst unter sich stehen, und wie man die Aufgaben, auf welche die gegenseitige Stellung von Puncten, Linien und Flächen im Raume führt, durch Zeichnungsoperationen in einer und derselben Ebene lösen kann.

§. 2.

Von mathematischen Vorkenntnissen verlangt die descriptive Geometrie blos Bekanntschaft mit den wesentlichsten Lehren der elementaren Geometrie (Planimetrie und Stereometrie).

Behufs künftiger Citate sollen diejenigen stereometrischen Sätze, auf welche man am häufigsten zurückweisen muß, hier unter Nummern zusammengestellt werden.

I. Eine Ebene wird von einer bewegten Geraden beschrieben, wenn diese eine andere Gerade fortwährend schneidet und zugleich mit einer gegebenen Richtung parallel bleibt; oder wenn sie zwei parallele oder sich schneidende Gerade beständig schneidet.

II. Eine Ebene ist bestimmt durch zwei parallele oder sich schneidende Gerade, oder durch drei Puncte, die nicht in einerlei Richtung liegen.

III. Eine Ebene kann von einer Geraden nur in einem Puncte geschnitten werden.

IV. Zwei Ebenen können sich nur nach einer Geraden schneiden.

V. Gehen drei Ebenen nicht durch eine und dieselbe Gerade, so bilden sie drei geradlinige Durchschnitte, welche alle entweder unter sich parallel sein oder in einem und demselben Puncte zusammenkommen müssen.

VI. Eine Gerade liegt ganz in einer Ebene, wenn sie zwei Puncte mit dieser gemein hat; oder wenn sie durch einen Punct der Ebene geht und zugleich einer in der Ebene gezogenen Geraden parallel ist.

VII. Eine Gerade ist senkrecht auf einer Ebene, d. h. auf allen Geraden, die man durch ihren Fußpunct in der Ebene ziehen kann, wenn sie auf zwei solchen Geraden senkrecht steht.

VIII. Sind mehrere Gerade auf einer andern Geraden in demselben Puncte senkrecht, so liegen sie in einer Ebene. (Oder: wird ein rechter Winkel um seinen einen Schenkel gedreht, so beschreibt der andere Schenkel eine auf dem ersten senkrechte Ebene.)

IX. Auf eine Ebene ist durch einen in oder außer ihr gegebenen Punct nur eine einzige Senkrechte möglich.

X. Fällt man aus einem und demselben Puncte eine Senkrechte auf eine Ebene und eine zweite auf eine in der Ebene gezo-

gene Gerade, so ist die Verbindungslinie beider Fußpuncte senkrecht auf jener Geraden.

XI. Steht eine Gerade senkrecht auf einer Ebene, so sind auf dieser Ebene alle durch die Gerade gehenden Ebenen senkrecht.

XII. Die Schnittlinie zweier Ebenen, welche auf einer dritten Ebene senkrecht sind, ist senkrecht zu dieser.

XIII. Schneiden zwei Ebenen sich senkrecht, so ist jede Gerade, welche man in der einen senkrecht zur Schnittlinie ziehen kann, senkrecht zur andern.

XIV. Zwei auf einerlei Ebene senkrechte Gerade sind parallel.

XV. Ist eine von zwei parallelen Geraden senkrecht auf einer Ebene, so ist auch die andere senkrecht auf dieser Ebene.

XVI. Ist eine Gerade senkrecht auf zwei Ebenen, so sind diese parallel.

XVII. Zwei parallele Ebenen werden von einer dritten nach Parallellinien geschnitten.

XVIII. Eine Gerade ist einer Ebene parallel, wenn sie mit einer in der Ebene gezogenen Geraden parallel läuft.

XIX. Ist eine Gerade zweien Ebenen parallel, so ist sie auch der Durchschnittslinie derselben parallel.

XX. Sind die Schenkel eines Winkels den Schenkeln eines andern parallel, so sind entweder die Winkel gleich oder sie suppliren sich, und ihre Ebenen sind parallel (können aber auch zu einer einzigen Ebene zusammenfallen).

Von der Darstellung des Punctes, der geraden Linie und Ebene.

§. 3.

Durch die Projection eines Puncts ist eine Gerade (das projicirende Loth) gegeben, in welcher er liegt (§. 2, IX); der Punct selbst aber ist nicht bestimmt, da er noch in jeder beliebigen Entfernung von der Grundebene angenommen werden kann. Jene Projection gehört demnach allen möglichen Puncten der projicirenden Linie gemeinschaftlich an, d. h. sie ist die Projection dieser Linie selbst. Die Projection irgend einer andern (nicht zur Grundebene senkrechten) Geraden wird man erhalten, wenn man ihren

Anfangspunct projicirt, das Projectionsloth (welches als solches immer senkrecht zur Grundebene, also parallel mit seiner ursprünglichen Lage bleiben muß) an der gegebenen Linie bis zum Endpuncte fortgleiten läßt und den Weg des Fußpunctes verfolgt (wobei übrigens Anfangs- und Endpunct auch in unendlicher Entfernung gedacht werden können). Das Projectionsloth beschreibt während seiner Bewegung eine Ebene (§. 2, I); daher müssen die verschiedenen Lagen seines Fußpunctes sämmtlich in der Geraden (§. 2, IV.) enthalten sein, nach welcher diese Ebene von der Grundebene geschnitten wird; woraus unmittelbar folgt, daß die Projection einer Geraden ihrer Richtung nach gegeben ist, wenn man die Projectionen von zweien ihrer Puncte kennt, — und auch ihrer Größe nach, wenn diese Puncte die Endpuncte sind. Die Ebene, welche man sich senkrecht zur Grundebene durch eine Gerade denken kann, um deren Projection (als Schnitt beider Ebenen) zu erhalten, heißt die projicirende Ebene der Geraden.

§. 4.

Gleichwie ein Punct durch seine Projection noch nicht bestimmt ist, so reicht auch zur Bestimmung einer geraden Linie eine Projection nicht hin; denn durch diese ist blos die projicirende Ebene gegeben, und sie entspricht allen möglichen Linien, die man in dieser Ebene ziehen kann. Kennt man aber noch die Projection eines Puncts oder einer Linie auf einer zweiten Ebene, die mit der ursprünglichen Grundebene nicht parallel ist, so bestimmt sich der Punct als Durchschnitt zweier Projectionslothe, die Gerade als Durschschnitt zweier Ebenen.

Die descriptive Geometrie nimmt deshalb immer zwei (unbegrenzte) Grundebenen an, und zwar rechtwinkelig verbunden, weil so die vorkommenden Constructionen am einfachsten werden. Man bezeichnet die eine als horizontale, die andere als verticale, und unterscheidet

durch diese Beiworte auch die auf ihnen gezeichneten Projectionen. Unter {horizontal / vertical}-projicirender Linie oder Ebene hat man diejenige zu verstehen, mittels deren man die {Horizontal / Vertical}-Projection eines Punkts oder einer Geraden erhält. Die Durchschnittslinie der Grundebenen heißt Grundschnitt (Projectionsaxe, Basis). Beide Grundebenen in Verbindung bilden das Grundsystem.

Die Grundebenen bringen den Raum in vier Abtheilungen, und jede Ebene scheidet die andere in zwei Theile, so daß man eine vordere und hintere Horizontalebene und eine obere und untere Verticalebene hat*).

Von den beiden Grundebenen hat keine etwas vor der andern voraus, weshalb man, wenn man will, stets beide mit einander vertauschen kann.

§. 5.

Um mittels der Grundebenen die Lage einer unbegrenzten Ebene anzuzeigen, kann man nicht, wie bei der Linie, ihre sämmtlichen Puncte projiciren, indem man dadurch in allen Fällen die Grundebenen selbst als Projectionen der Ebene erhalten würde. Man hat für das Einfachste befunden, eine Ebene durch Angabe der beiden Geraden zu bestimmen, nach denen sie die Grundebenen schneidet, und diesen Geraden den Namen Spuren (Tracen, Risse) gegeben.

Die Spuren einer Ebene müssen sich immer im Grundschnitte begegnen oder beide mit ihm parallel laufen (§. 2, V).

Spuren heißen auch die Durchschnittspuncte einer Linie mit den Grundebenen (so wie die krummen Linien, nach welchen eine krumme Fläche die Grundebenen schneidet).

*) Die Bedeutung der in der Folge öfters gebrauchten Abkürzungen HE, VE ist augenfällig; GS = Grundschnitt.

§. 6.

Soll eine geometrische Aufgabe mittels der Projectionsmethode gelöst werden, so sind die nöthigen Constructionen zum Theil auf der Horizontalebene, zum Theil auf der Verticalebene auszuführen. Damit dieß mit Bequemlichkeit und Genauigkeit geschehen könne, muß man die beiden Grundebenen durch eine einzige repräsentiren.

Denkt man sich in dieser Absicht die Verticalebene um den Grundschnitt so weit gedreht, daß ihr oberer Theil mit der vordern Horizontalebene einen flachen Winkel bildet, so haben sich in der That beide Grundebenen zu einer vereinigt, welche man die Zeichnungsebene nennt. Der ursprüngliche Grundschnitt muß aber in dieser Zeichnungsebene immer angegeben sein. Was diesseits des Grundschnitts liegt, ist zugleich vordere Horizontal- und untere Verticalebene; jenseits liegt die obere Vertical- und hintere Horizontalebene. Zur Vermeidung der hieraus entstehenden Zweideutigkeiten in den Zeichnungen denkt man sich die untere verticale Ebene durch die vordere horizontale verdeckt und ebenso die hintere horizontale durch die obere verticale, und zeichnet die auf den verdeckten Theilen gelegenen Projectionen und Spuren punctirt. Sind aber die Projectionen selbst Puncte, so kann man blos durch die Bezeichnung andeuten, welchen Ebenen sie angehören. Ein im Raume gelegener Punct soll hier immer durch einen Buchstaben des großen Alphabets und jede seiner Projectionen durch denselben Buchstaben des kleinen Alphabets benannt sein, so jedoch, daß der an der Verticalprojection stehende einen Accent erhält. Sind x und x′ die Projectionen eines Puncts, so ist unter X oder (x, x′) immer dieser Punct im Raume zu verstehen. Auf gleiche Weise zeigt XY oder (xy, x′y′) diejenige Linie im Raume an, deren Projectionen xy und x′y′ heißen.

Man darf übrigens niemals vergessen, daß das Umlegen einer Grundebene in die andere nur die Erleichterung

der Zeichnungsoperationen bezweckt, und daß man, um sich über die Bedeutung dieser Operationen Rechenschaft zu geben, die Grundebenen immer in rechtwinkeliger Verbindung denken muß. So beziehen sich auch in Zukunft die Betrachtungen, durch welche man zur Auflösung einer vorgelegten Aufgabe zu gelangen sucht, überall auf den ursprünglichen Zustand des Grundsystems.

(Wenn daher z. B. von einer Geraden die Rede sein wird, welche einen in der Horizontalebene gelegenen Punct mit einem Puncte der Verticalebene verbindet, so bedeutet dieß nicht die Linie, welche in der Zeichnungsebene durch beide Puncte gezogen werden kann, sondern die Linie im Raume, wie sie vor dem Zurücklegen der Verticalebene sich darstellt. Oder wenn **PO**, **OP′** die Spuren einer Ebene sind, so hat man unter ∠ **POP′** nicht denjenigen Winkel zu verstehen, der durch beide Spuren in der Zeichnungsebene gebildet wird.)

§. 7.

Von zwei beliebig auf den Grundebenen angenommenen Puncten läßt sich nicht voraussetzen, daß sie einem Punkte im Raume als Projectionen zugehören; denn die aus ihnen auf den entsprechenden Grundebenen errichteten Senkrechten werden sich in vielen Fällen nicht schneiden. Es muß daher zwischen den Projectionen eines Punctes eine gewisse Beziehung statt finden, und diese ergiebt sich aus folgender Betrachtung. Legt man durch die von einem Puncte ausgehenden Projectionslothe eine Ebene, so muß diese auf jeder Grundebene senkrecht stehen (§. 2, XI), also auch auf dem Grundschnitt (§. 2, XII). Die Spuren dieser Ebene, welche die Projectionen des Punctes enthalten, sind demnach ebenfalls senkrecht zum Grundschnitt und werden nach dem Zurücklegen der Verticalebene einen flachen Winkel bilden oder auf einander fallen. Daraus folgt, daß die Richtung der Senkrechten, die man in der Zeichnungsebene aus der einen Projection eines Punctes auf den Grundschnitt fällt, auch

durch die *andere Projection* gehen muß, oder daß die Verbindungslinie der beiden Projectionen eines Punctes senkrecht zum Grundschnitt ist.

Da bei der ursprünglichen Stellung der Grundebenen die oben erwähnten Spuren mit den beiden Projectionslothen ein Rechteck einschließen, so sieht man, daß die Verticalprojection des Punctes vom Grundschnitt eben so weit entfernt ist, wie der Punct selbst von der Horizontalebene. Man nennt diese Entfernung seine *Horizontaldistanz*. Die *Verticaldistanz* ist gleich der Entfernung der Horizontalprojection vom Grundschnitt.

§. 8.

Liegt ein Punct in der $\left\{{H \atop V}\right\}$-Ebene, so fällt er mit seiner $\left\{{H \atop V}\right\}$-Projection zusammen; seine $\left\{{V \atop H}\right\}$-Projection fällt in den Grundschnitt (denn die $\left\{{H \atop V}\right\}$-Distanz ist $= 0$).

Ein im Grundschnitt gelegener Punct fällt mit seinen beiden Projectionen zusammen. Trifft daher eine Linie den Grundschnitt, so müssen ihre Projectionen sich im Grundschnitt begegnen.

§. 9.

Eine Gerade*) in der $\left\{{H \atop V}\right\}$-Ebene ist ihre eigene $\left\{{H \atop V}\right\}$-Projection; ihre $\left\{{V \atop H}\right\}$-Projection fällt in den Grundschnitt. (§. 8.)

Liegt die Gerade selbst im Grundschnitt, so fallen ihre beiden Projectionen mit ihr zusammen.

§. 10.

Ist eine Gerade senkrecht zur $\left\{{H \atop V}\right\}$-Ebene, so ist ihre $\left\{{H \atop V}\right\}$-Projection ein Punct (§. 3). Die sämmtlichen Puncte der

---

*) Hier und im Folgenden ist jede Gerade immer als *unbegrenzt* zu denken, wenn es nicht ausdrücklich anders bemerkt wird.

$\left\{\begin{smallmatrix}V\\H\end{smallmatrix}\right\}$-Projection müssen in der Senkrechten liegen, welche man aus der $\left\{\begin{smallmatrix}H\\V\end{smallmatrix}\right\}$-Projection auf den Grundschnitt fällt (§. 7). Diese Senkrechte ist also selbst die $\left\{\begin{smallmatrix}V\\H\end{smallmatrix}\right\}$-Projection.

§. 11.

Ist eine Gerade parallel zur $\left\{\begin{smallmatrix}H\\V\end{smallmatrix}\right\}$-Ebene, so ist ihre $\left\{\begin{smallmatrix}V\\H\end{smallmatrix}\right\}$-Projection parallel zum Grundschnitt. Denn da zwei beliebige Puncte der Linie gleiche $\left\{\begin{smallmatrix}H\\V\end{smallmatrix}\right\}$-Distanz haben, so müssen die $\left\{\begin{smallmatrix}V\\H\end{smallmatrix}\right\}$-Projectionen dieser Puncte gleichweit vom Grundschnitt abstehen (§. 7).

Läuft demnach eine Gerade parallel mit beider Grundebenen (oder mit dem Grundschnitt), so sind ihre beiden Projectionen dem Grundschnitt parallel.

§. 12.

Liegt eine Gerade in einer zum Grundschnitt senkrechten Ebene, oder (was dasselbe ist) so, daß eine ihr parallele und den Grundschnitt treffende Linie mit letzterem einen rechten Winkel bildet, so stehen beide Projectionen der Geraden auf dem Grundschnitt in einem und demselben Puncte senkrecht, bilden also in der Zeichnungsebene eine einzige Linie. Die Gerade selbst kann sich nicht als Durchschnitt zweier projicirenden Ebenen ergeben, weil diese Ebenen hier in eine zusammenfallen. Sie ist daher nur dann bestimmt, wenn noch weitere Angaben hinzukommen; z. B. wenn ihre Spuren gegeben sind; oder die $\left\{\begin{smallmatrix}H\\V\end{smallmatrix}\right\}$-Distanzen, welche den $\left\{\begin{smallmatrix}H\\V\end{smallmatrix}\right\}$-Projectionen von zweien ihrer Puncte entsprechen; oder wenn man ihre Projection auf einer dritten Grundebene hat, welche zu keiner der ursprünglichen parallel ist.

(Eine solche dritte Grundebene nimmt man dann gewöhnlich senkrecht zu den beiden ersten.)

§. 13.

Im Allgemeinen kann man zwei in den Grundebenen

beliebig gezogene Gerade als Projectionen einer Linie betrachten, weil die durch sie geführten projicirenden Ebenen sich immer schneiden werden. *) Nur wenn man die eine Projection senkrecht zum Grundschnitt angenommen hat, ist die andere nicht mehr ganz willkührlich (§. 10, §. 12).

§. 14.

Liegt eine Ebene parallel zum Grundschnitt, so können ihre Spuren diesen nicht treffen, müssen also mit ihm parallel laufen.

Ist dabei die Ebene zugleich parallel mit einer der Grundebenen, so hat sie nur eine einzige Spur.

§. 15.

Die $\left\{\begin{matrix}H\\V\end{matrix}\right\}$=Spur einer zur $\left\{\begin{matrix}V\\H\end{matrix}\right\}$=Ebene senkrechten Ebene steht senkrecht auf dieser (§. 2, XII), also auch auf dem Grundschnitt.

Steht eine Ebene auf beiden Grundebenen (oder auf dem Grundschnitt) senkrecht, so sind beide Spuren senkrecht zum Grundschnitt.

§. 16.

Geht eine Ebene durch den Grundschnitt, so fallen hre Spuren beide mit diesem zusammen, und zu ihrer Bestimmung ist noch eine Angabe nöthig. Gewöhnlich nimmt man eine dritte Grundebene zu Hülfe.

§. 17.

Zwei Gerade, die sich im Grundschnitte treffen oder beide mit ihm parallel laufen, kann man immer für Spuren einer Ebene nehmen, weil durch ein solches Linienpaar eine Ebene stets möglich und auch völlig bestimmt ist.

---

*) Will man die Linie als eine *begrenzte* darstellen, so hat man für die Projectionen der Grenzpuncte den in §. 7 enthaltenen Satz zu beachten.

§. 18.

Man kann sich leicht überzeugen, daß die in §§. 8—11, 14, 15 aufgeführten Sätze auch umgekehrt (indem man aus den Projectionen oder Spuren auf die Lage der Linien oder Ebenen selbst schließt) Geltung haben. *)

§. 19.

Ein Punct oder eine Linie wird als gegeben betrachtet, wenn die Projectionen bekannt sind; eine Ebene ist gegeben, wenn man ihre Spuren kennt.

Zweites Kapitel.

Lehrsätze und Aufgaben über gerade Linien und Ebenen.

§. 20.

Fallen die Spuren einer geraden Linie in die Spuren einer Ebene, so liegt die Linie selbst in der Ebene (§. 2, VI).

Umgekehrt: Eine in einer Ebene gezogene Linie hat ihre Spuren in den gleichnamigen Spuren der Ebene.

§. 21.

Die gleichnamigen Spuren paralleler Ebenen sind parallel (§. 2, XVII).

Umgekehrt: Haben zwei gegen den Grundschnitt geneigte Ebenen parallele Spuren, so sind sie selbst parallel (§. 2, XX).

---

*) Es ist nöthig, daß der Anfänger diese umgekehrten Sätze für sich streng beweise.

(Sind die Spuren zweier Ebenen dem Grundschnitt parallel, so können zwar die Ebenen selbst parallel sein; sie können sich aber auch nach einer mit dem Grundschnitt parallelen Geraden schneiden.)

§. 22.

Die gleichnamigen Projectionen paralleler Linien sind parallel. Denn nimmt man in jeder der Linien einen beliebigen Punct an und fällt aus diesen Puncten Lothe auf die $\left\{\begin{smallmatrix}\mathfrak{H}\\ \mathfrak{V}\end{smallmatrix}\right\}$ = Ebene, so sind diese parallel (§. 2, XIV); daher sind die durch sie gehenden projicirenden Ebenen parallel (§. 2, XX); mithin auch deren Spuren.

Sind in beiden Grundebenen die Projectionen zweier Geraden parallel und nicht zum Grundschnitte senkrecht, so müssen die Geraden im Raume selbst parallel sein. Denn es sind die gleichnamigen projicirenden Ebenen parallel (§. 2, XIV, XX); die Durchschnitte der beiden Systeme projicirender Ebenen sind daher sämmtlich unter sich parallel (§. 2, XVII); unter diesen Durchschnitten befinden sich aber die fraglichen Linien.

(Sind die Projectionen senkrecht auf dem Grundschnitt, so ist ein Parallelsein der Linien im Raume möglich, aber nicht nothwendig.)

§. 23.

Zwei Linien, deren Projectionen sich schneiden, treffen sich nur dann, wenn die Verbindungslinie der Schnittpuncte gleichnamiger Projectionen senkrecht auf dem Grundschnitt steht. Denn es ist klar, daß nur in den genannten Schnittpuncten der gemeinsame Punct der wirklichen Linien projicirt sein könnte; findet nun zwischen jenen Puncten die in §. 7 angegebene Beziehung nicht statt, so kann ein solcher gemeinsamer Punct im Raume nicht existiren.

Zwei Linien müssen sich nothwendig treffen, wenn die Verbindungslinie ꝛc.

§. 24.

Steht eine Linie senkrecht auf einer Ebene, so sind ihre Projectionen senkrecht auf den gleichnamigen Spuren der Ebene. Denn es steht die $\left\{\begin{matrix}H\\V\end{matrix}\right\}$ = Spur der Ebene senkrecht auf der durch die Linie gelegten $\left\{\begin{matrix}\text{horizontal}\\\text{vertical}\end{matrix}\right\}$ = projicirenden Ebene (§. 2, XI. XII).

Sind die Projectionen einer Linie senkrecht anf den gleichnamigen Spuren einer gegen den Grundschnitt geneigten Ebene, so ist die Linie selbst senkrecht auf der Ebene. Denn die beiden projicirenden Ebenen stehen auf den entsprechenden Spuren der Ebene senkrecht (§. 2, XIII), also auf der Ebene selbst (§. 2, XI); mithin steht auch ihre Durchschnittslinie auf der Ebene senkrecht (§. 2, XII.)

(Ist eine Ebene dem Grundschnitt parallel, und man zieht in einer zum Grundschnitt senkrechten Ebene eine beliebige Gerade, so sind ihre Projectionen immer senkrecht auf den Spuren der erstern Ebene (§§. 14, 12), obgleich die Gerade selbst jede denkbare Neigung gegen die Ebene haben kann.)

§. 25.

Ist eine begrenzte Linie in einem beliebigen Verhältniß getheilt, so wird ihre Projection durch die Projection des Theilungspunctes in demselben Verhältniß getheilt. Denn die projicirenden Lothe aus den Endpuncten und dem Theilungspuncte sind parallel, und die Elementargeometrie beweist, daß ein System von Parallelen alle hindurchgelegten Geraden nach einem und demselben Verhältnisse schneidet.

§. 26.

Ist eine begrenzte Linie parallel zu einer Grundebene, so hat ihre Projection auf dieser Ebene einerlei Länge mit ihr. Denn die Linie und ihre Projection sind parallele Seiten in einem Rechteck,

dessen beide andere Seiten durch die aus den Endpuncten gefällten Projectionslothe gebildet werden.

§. 27.

Die Projection einer begrenzten Geraden kann nie größer sein, als die Gerade selbst. Denn zieht man durch den einen Endpunct der Geraden eine Parallele mit ihrer Projection, so ist das zwischen die Projectionslothe beider Endpuncte fallende Stück derselben der Projection gleich und stellt die Kathete eines rechtwinkeligen Dreiecks vor, dessen Hypotenuse die Gerade im Raume ist.

§. 28.

Aufgabe. Die Projectionen einer Geraden zu zeichnen, welche durch zwei gegebene Puncte (a, a'), (b, b') geht.

Auflösung. Verbinde die gleichnamigen Projectionen der Puncte, so sind die erhaltenen Linien ab, a'b' die verlangten Projectionen (§. 3).

§. 29.

Aufg. Durch einen gegebenen Punct eine Parallele zu einer gegebenen Geraden zu legen.

Aufl. Ziehe durch die Projectionen des Punctes Parallelen mit den gleichnamigen Projectionen der Geraden. (§. 22.)

§. 30.

Aufg. Aus den Projectionen St, s'T' einer Geraden ihre Spuren zu finden.

Fig. 1, 2. **Aufl.** Errichtet man aus den Puncten t, s', in denen die gegebenen Projectionen dem Grundschnitt begegnen, Senkrechte tT', s'S auf diesem, so sind St, tT' die Spuren der horizontalprojicirenden und Ss', s'T' die der verticalprojicirenden Ebene. Da die gegebene Linie beiden projicirenden Ebenen angehört, so muß ihre H-Spur in

den H=Spuren St und s′S beider Ebenen zugleich liegen (§. 20), kann also kein anderer Punct sein, als der Durchschnitt S dieser Spuren. Ebenso ergiebt sich die V=Spur T′ der Linie als Durchschnitt von s′T′ und tT′.

Zusatz. Läuft eine der gegebenen Projectionen mit dem Grundschnitt parallel, so findet man nur eine Spur, was mit §. 11 übereinstimmt.

§. 31.

Aufg. Aus den Spuren S, T′ einer Geraden ihre Projectionen zu finden.

Aufl. Ist T′t ⊥ GS, so sind t und S die H=Projectionen zweier Puncte der Geraden (§. 8), also St die H=Projection der Geraden selbst (§. 3). Auf ähnliche Weise erhält man ihre V=Projection s′T′. Fig. 1, 2.

§. 32.

Aufg. Die Spuren einer Ebene zu zeichnen, welche durch eine gegebene Gerade beliebig geht.

Aufl. Bestimme die Spuren der Geraden (§. 30) und verbinde dieselben entweder mit einem beliebigen Puncte des Grundschnitts, oder ziehe durch sie Parallelen mit dem Grundschnitt.

Zusatz. Hat die gegebene Gerade keine {H/V}=Spur, d. h. ist sie parallel zur {H/V}=Ebene, so ist die {V/H}=Spur jeder durch sie gelegten Ebene parallel mit ihr, also auch mit ihrer {V/H}=Projection.

§. 33.

Aufg. Die Spuren einer Ebene zu zeichnen, welche durch einen gegebenen Punct beliebig geht.

Aufl. Lege durch den gegebenen Punct eine beliebige Gerade und durch diese eine Ebene (§. 32).

§. 34.

Aufg. Die Projectionen einer Geraden zu zeichnen, welche in einer gegebenen Ebene beliebig liegt.

Aufl. Man nehme in jeder der gegebenen Spuren willkührlich einen Punct, betrachte beide Puncte als Spuren einer Geraden und suche ihre Projectionen (§. 31).

§. 35.

Aufg. Die Projectionen eines Punctes anzugeben, der in einer gegebenen Ebene beliebig liegt.

Aufl. Ziehe in der Ebene eine beliebige Gerade (§. 34) und nimm in derselben einen beliebigen Punct (§. 7).

Zusatz. Steht eine Ebene senkrecht zur $\begin{Bmatrix}H\\V\end{Bmatrix}$=Ebene, so fällt die $\begin{Bmatrix}H\\V\end{Bmatrix}$=Projection jedes in ihr liegenden Puncts in ihre $\begin{Bmatrix}H\\V\end{Bmatrix}$=Spur; denn die Ebene enthält das $\begin{Bmatrix}h\\v\end{Bmatrix}$=projicirende Loth des Punctes. Umgekehrt: Geht die $\begin{Bmatrix}H\\V\end{Bmatrix}$=Spur einer Ebene durch die $\begin{Bmatrix}H\\V\end{Bmatrix}$=Projection eines in ihr gelegenen Punctes, so steht die Ebene senkrecht zur $\begin{Bmatrix}H\\V\end{Bmatrix}$=Ebene.

Die Projectionen eines Punctes fallen daher beide in die gleichnamigen Spuren einer Ebene, die durch ihn senkrecht zum Grundschnitt gelegt ist. Umgekehrt: Gehen die Spuren einer Ebene durch die gleichnamigen Projectionen eines in ihr liegenden Punctes, so steht die Ebene senkrecht zum Grundschnitt.

§. 36.

Aufg. Die $\begin{Bmatrix}H\\V\end{Bmatrix}$=Projection eines Puncts und seine $\begin{Bmatrix}H\\V\end{Bmatrix}$=Distanz sind gegeben. Man soll seine $\begin{Bmatrix}V\\H\end{Bmatrix}$=Projection finden.

Aufl. Fälle aus der gegebenen Projection eine Senkrechte auf den Grundschnitt und nimm in der Richtung dieser Senkrechten einen Punct, der vom Grundschnitt um die gegebene Distanz entfernt ist, so ist dieser die zweite Projection (§. 7).

Man sieht, daß man zwei Auflösungen erhält, wofern nicht bestimmt ist, auf welcher Seite der $\left\{{H \atop V}\right\}$-Ebene der Punkt im Raume liegt.

Zusatz. Es seien a, a′ die Projectionen eines Punkts A auf ein Grundsystem, dessen Grundschnitt XX ist. Angenommen, man wolle in diesem Grundsysteme zwar die HE beibehalten, den VE aber eine andere Lage geben, so daß als neuer Grundschnitt die Linie YY erscheint, und man verlange die neue V-Projection jenes Punctes A (dessen H-Projection in a verbleibt). Lös't man nun in Beziehung auf den neuen Grundschnitt YY die vorstehende Aufgabe, indem man die H-Distanz (ma′) des Punctes A aus der ursprünglichen VE entnimmt, so erhält man a′ als neue V-Projection. (Der Punct B aber, welcher auf dem ursprünglichen Grundsystem in b und b′ projicirt war, projicirt sich auf die neue VE nach b′.) Fig. 3.

§. 37.

Aufg. Es ist die $\left\{{H \atop V}\right\}$-Projection einer Geraden und die $\left\{{H \atop V}\right\}$-Projection eines in ihr liegenden Punctes gegeben. Man soll die zweite Projection des Punctes finden.

Aufl. Die gesuchte Projection muß in der gleichnamigen Projection der Geraden liegen und zugleich in der Senkrechten, welche aus der bekannten Projection auf den Grundschnitt gefällt ist (§. 7); sie ist also der Durchschnitt dieser beiden Linien.

§. 38.

Aufg. Eine Ebene POP′ und eine Projection eines in ihr liegenden Punctes A sind gegeben; man soll die andere Projection des Punctes finden.

Aufl. Die gegebene Projection sei z. B. die horizontale a. Man denke sich durch A parallel zur H-Spur der gegebenen Ebene eine Gerade gezogen, und zeichn Fig. 7.

deren H=Projection aq (‖PO). Diese Gerade wird ganz in der gegebenen Ebene liegen; ihre V=Spur Q′ liegt mithin in OP′ und wird mittels qQ′ ⊥ GS gefunden; ihre V=Projection Q′a′ ist ‖GS. Hat man letztere gezogen, so findet man a′ nach §. 37.

Man hätte sich aber auch durch A eine Parallele zu OP′ denken und diese in Projection legen können.

[Von dieser fände man zuerst die H=Projection (‖GS), dann die H=Spur (in OP) und dann die V=Projection (‖OP′).]

§. 39.

Aufg. Die Durchschnittslinie zweier gegebenen Ebenen zu projiciren.

Aufl. Da die Durchschnittslinie sowohl der einen als der andern der gegebenen Ebenen angehört, so muß ihre H=Spur in den H=Spuren beider Ebenen zugleich liegen; ihre V=Spur in den V=Spuren beider Ebenen. Die Spuren der Durchschnittslinie sind demnach die Durchschnitte gleichnamiger Ebenenspuren, und die gesuchten Projectionen findet man nach §. 31.

Fig. 16. †) Sind zwei gleichnamige Spuren der Ebenen parallel, z. B. die V=Spuren OP′ und QP″, so ist auch die Durchschnittslinie mit ihnen parallel (§. 2, V.) Da nun OP′ ihre eigene V=Projection ist und ihre H=Projection in den Grundschnitt fällt (§. 9), so muß die V=Projection der Durchschnittslinie ‖ OP′, die H=Projection ‖ GS sein (§. 22).

††) Ist eine der gegebenen Ebenen parallel zu einer Grundebene (etwa zur HE, wie die Ebene T′R′ in Fig. 5), so ist die Durchschnittslinie beider parallel mit der entsprechenden Spur der andern Ebene; ihre eine Projection ist daher ebenfalls mit dieser Spur parallel, ihre andere fällt mit der Spur der erstern Ebene zusammen. (In Fig. 5. sind ta, T′a′ die Projectionen der Schnittlinie.)

Fig. 4. †††) Sind die gegebenen Ebenen (PR, P′R′), (TU, T′U′) beide dem Grundschnitt parallel, so ist es auch ihre

Schnittlinie. Diese hat demnach weder H= noch V=Spur, und kann nach der oben gegebenen Regel nicht gefunden werden.

Schneidet man nun beide Ebenen durch eine beliebige dritte Ebene VWV′, so werden die erhaltenen Schnittlinien sich in einem Puncte (a, a′) begegnen, welcher auf dem Durchschnitte der gegebenen Ebenen liegt; man hat daher nur noch durch a und a′ Parallelen mit dem Grundschnitt zu ziehen.

Zusatz. Fällt eine Spur der Durchschnittslinie nicht mehr in das Zeichnungsblatt, wie in Fig. 5 die verticale, so kann man eine mit einer Grundebene parallele Ebene zu Hülfe nehmen. Ist z. B. die Ebene T′R′ der HE parallel, so schneidet sie die gegebenen Ebenen nach zwei Horizontallinien (at, R′T′), (ar, T′R′), deren Durchschnitt (a, a′) nothwendig auf der Schnittlinie der gegebenen Ebene liegen muß, so daß aP, a′p′ die Projectionen dieser Schnittlinie sind. Fig. 5.

Fallen beide Spuren der gesuchten Schnittlinie über die Grenzen des Blattes hinaus, so schneide man die gegebenen Ebenen durch zwei Hülfsebenen, welche den beiden Grundebenen oder auch einer und derselben Grundebene parallel sind.

§. 40.

Aufg. Den Durchschnittspunct einer gegebenen Geraden (ab, a′b′) und einer gegebenen Ebene POQ′ zu projiciren. Fig. 6.

Aufl. Dieser Punct muß in der Linie liegen, nach welcher eine von den projicirenden Ebenen der AB die POQ′ schneidet. Wählt man die h=projicirende Ebene, so sind baq und qQ′ (⊥ GS) ihre Spuren; demnach ist Q′p′ die V=Projection ihres Schnittes mit POQ′ und a′ die die V=Projection des verlangten Punctes, dessen H=Projection a jetzt nach §. 37 gefunden wird.

(Auf eine ähnliche Construction führt die Benützung der v=projicirenden Ebene von AB.)

Zusatz. Hätte man Q′p′ so gefunden, daß sie ∥ a′b′ gewesen wäre, so würde dieß angezeigt haben, daß AB der Ebene POQ′ parallel läge (§. 2, XVIII).

§. 41.

Aufg. Die Spuren einer durch drei gegebene Puncte bestimmten Ebene zu zeichnen.

Aufl. Es ist klar, daß statt dreier Puncte ebensowohl ein Punct und eine Gerade, oder zwei sich schneidende Gerade, oder zwei Parallelen gegeben sein können. In den beiden letztern Fällen hat man die Spuren der Geraden zu suchen (§. 30) und die gleichnamigen zu verbinden; die Verbindungslinien sind die verlangten Spuren der Ebene (§. 20).

Sind drei Puncte gegeben, so verbinde man einen derselben mit den beiden andern, oder man lege durch zwei eine Gerade und durch den dritten eine Parallele mit ihr, und verfahre mit dem erhaltenen Linienpaare wie vorhin.

(Probe für die Genauigkeit der Construction: die gefundenen Spuren müssen sich im Grundschnitte begegnen.)

Zusatz. Liegen die drei gegebenen Puncte (also auch ihre gleichnamigen Projectionen) in gerader Linie, so sind unendlich viele Ebenen durch sie möglich.

§. 42.

Aufg. Durch einen gegebenen Punct (a,a′) eine Ebene parallel einer gegebenen Ebene TUT′ zu legen.

Fig. 7. **Aufl.** Zieht man durch (a, a′) eine ~~beliebige~~ Parallele (aq, a′Q′) zur H=Spur TU der gegebenen Ebene (§. 29, §. 9), so fällt diese Parallele offenbar ganz in die gesuchte Ebene. Man hat daher nur ihre V=Spur Q′ zu bestimmen, Q′O || T′U und OP || UT zu ziehen, um in POQ′ die gesuchte Ebene zu haben.

Die durch (a,a′) gelegte Hülfslinie kann eben so gut auch parallel zur V=Spur T′U der gegebenen Ebene angenommen werden.

§. 43.

Aufg. Durch eine gegebene Gerade M eine Ebene parallel einer gegebenen Geraden N zu legen.

Aufl. Man ziehe durch einen beliebigen Punct der M eine Parallele L zu N (§. 29) und lege durch M und L eine Ebene (§. 41), so ist diese die gesuchte (§. 2, XVIII).

Zusatz. Sind M und N parallel, so ist die Ebene unendlich vieler Lagen fähig.

(Schneiden sie sich, so bestimmen sie unmittelbar die Ebene.)

§. 44.

Aufg. Durch einen gegebenen Punct eine Gerade senkrecht zu einer gegebenen Ebene zu ziehen.

Aufl. Die Projectionen der verlangten Geraden sind die beiden Senkrechten, die man aus den Projectionen des Puncts auf die gleichnamigen Spuren der gegebenen Ebene fällt (der Punct mag in oder außerhalb der Ebene liegen) (§. 24).

§. 45.

Aufg. Durch einen gegebenen Punct (a,a′) eine Ebene senkrecht zu einer gegebenen Geraden (cd, c′d′) zu führen.

Aufl. Man denke sich eine beliebige zu CD senkrechte Ebene TUT′ (§. 24) und lege parallel zu ihr eine Ebene durch A (§. 42), so ist diese die gesuchte. Fig. 7.

Die Spuren der Ebene TUT′ braucht man aber gar nicht wirklich zu zeichnen; denn da sie senkrecht zu den gleichnamigen Projectionen von CD sein würden, so kann man die Projectionen einer Geraden, die mit einer dieser Spuren parallel sein muß, unmittelbar angeben.

(Es ist für die Auflösung der Aufgabe gleichgiltig, ob A in oder außer CD liegt.)

Zusatz. Die Auflösung wird bedeutend einfacher, wenn die gegebene Gerade in einer Grundebene liegt, in-

dem dann die verlangte Ebene senkrecht auf dieser Grundebene steht.

§. 46.

Aufg. **Aus einem gegebenen Puncte A eine Senkrechte auf eine gegebene Gerade M zu fällen.**

Aufl. Lege durch A eine Ebene senkrecht zu M (§. 45) und bestimme den Punct B, in welchem sie von M getroffen wird (§. 40), so ist die Verbindungslinie AB die verlangte Senkrechte.

§. 47.

Aufg. **Durch eine gegebene Gerade N eine Ebene senkrecht zu einer gegebenen Ebene P zu führen.**

Aufl. Ziehe durch einen beliebigen Punct der N eine Senkrechte K zu P (§. 44) und lege durch K und N eine Ebene (§. 41), so ist diese die verlangte (§. 2, XI).

Die Linie M kann auch in der Ebene P liegen.

(Wann läßt die Aufgabe unendlich viele Lösungen zu?)

§. 48.

Erklärung. Eine Ebene in die $\left\{\begin{matrix}H\\V\end{matrix}\right\}$-Ebene **umklappen**, heißt: sie um ihre $\left\{\begin{matrix}H\\V\end{matrix}\right\}$-Spur so lange drehen, bis sie mit der $\left\{\begin{matrix}H\\V\end{matrix}\right\}$-Ebene zusammenfällt.

Es ist klar, daß man jede Ebene in eine und dieselbe Grundebene auf doppelte Weise umklappen kann, je nachdem man sie nach der einen oder andern Seite hin dreht.

(Ein Beispiel von Umklappung ist bereits durch das Zurücklegen der Verticalebene gegeben.)

§. 49.

Aufg. **Eine Linie, welche in S und T′ ihre Spuren hat, soll mit ihrer horizontalprojici-**

renden Ebene StT′ einmal in die VE, das andere mal in die HE umgeklappt werden.

Aufl. Bei der Umklappung in die VE bleibt T′t (als Drehungsaxe) unbeweglich; St wird, da sie immer auf T′t senkrecht bleibt, während der Drehung in der HE hinstreifen; jeder ihrer Puncte beschreibt einen Kreis um t und kommt nach vollendeter Drehung in den Grundschnitt zu liegen; so der Punct S nach S_1 (oder auch auf die andere Seite von t); daher ist $T'S_1$ die Lage der ST′ nach verticaler Umklappung der Ebene StT′. Fig. 12.

Wird StT′ in die HE umgeklappt, so bleibt St unbeweglich und T′t beständig senkrecht auf St; T′t wird also auch nach vollendeter Drehung noch senkrecht zu St sein. Ferner kann ein Punct in T′t seine Entfernung von t während der Drehung nicht ändern. Macht man daher $\angle StT'_2 = 90^0$, $tT'_2 = tT'$, so ist ST'_2 die Lage der ST′ nach horizontaler Umklappung von StT′.

(Zur Uebung: Eine Linie werde mit ihrer verticalprojicirenden Ebene in beide Grundebenen umgeklappt).

§. 50.

Aufg. Die Horizontalspur PO einer Ebene und die Projectionen a, a′ eines in ihr liegenden Punctes sind gegeben. Man soll die Lage des Puncts angeben, nachdem die Ebene in die HE umgeklappt worden.

Aufl. Denkt man sich sowohl aus A als aus dessen Projection a Senkrechte auf OP gefällt, so werden beide einerlei Fußpunkt F haben (§. 2, X). Dreht man nun die gegebene Ebene um OP, so muß AF stets senkrecht auf OP bleiben, also nach vollendeter Drehung in die Richtung von aF fallen. Die Lage des Puncts A nach der Umklappung wird daher bestimmt sein, sobald man seine Entfernung von F kennt. Diese ist aber die Hypotenuse eines rechtwinkeligen Dreiecks AFa, dessen Fig. 8.

eine Kathete aF, dessen andere $Aa = ma'$ ist. Macht man demnach $mn = aF$, $FA_1 = a'n$, so ist A_1 die Lage von A nach Umklappung der Ebene AOP.

Fig. 9. †) Ist $OP \perp$ GS, d. h. ist die Ebene senkrecht zur VE, so würde ihre V=Spur durch a' gehen und es ist AF $(= A_1F) = a'O$ (§. 26).

Wollte man in diesem Falle die Ebene auch in die VE umklappen und die umgeklappte Lage $A_{,,}$ des Punctes (a, a') angeben, so hätte man $a'A_{,,} \perp Oa'$ und $a'A_{,,} = ma$ zu machen.

§. 51.

Aufg. Die Entfernung zweier gegebenen Puncte (a, a'), (b, b') darzustellen.

Fig. 10. **Aufl. I.** Liegen beide Puncte auf einerlei Seite der HE (wie Fig. 10. angenommen wurde), so bestimmen sie mit ihren H=Projectionen ein Trapez $ABba$, welches bei a und b rechte Winkel hat und dessen parallele Seiten die H=Distanzen der Puncte A und B sind. Man kann nun die durch AB gehende horizontalprojicirende Ebene mit dem in ihr enthaltenen Trapez in die HE umklappen und dieses zeichnen, wenn man

$$\angle baA_1 = \angle abB_1 = 90°$$
$$aA_1 = ma'$$
$$bB_1 = nb'$$

macht; dann ist A_1B_1 die gesuchte Länge.

(Probe für die Genauigkeit der Zeichnung: die verlängerte A_1B_1 muß durch die H=Spur der Verbindungslinie $(ab, a'b')$ gehen).

Statt der h=projicirenden Ebene kann man auch die v=projicirende umklappen. Lägen die Puncte A, B auch auf einerlei Seite der VE, so hätte man wie vorhin ein Trapez zu construiren. In der angenommenen Figur aber liegen sie auf entgegengesetzten Seiten, so daß die Verbindungslinie AB die VE schneidet, und statt des Tra=

pezes erscheint die Figur $a'b'B_2A_2$, welche man erhält, wenn man in den Endpunkten von $a'b'$ die V=Distanzen der Punkte A, B unter rechten Winkeln, aber nach entgegengesetzten Seiten, ansetzt.

(Probe der Zeichnung: S's ⊥ GS, d. h. S' muß die V=Spur der (ab, a'b') sein.)

Es ist klar, daß auch die zwischen A, B und a, b gelegene Figur kein Trapez ist, sobald A und B auf entgegengesetzten Seiten der HE liegen.

Aus dem Vorstehenden läßt sich folgende allgemein giltige Regel entnehmen: Will man die h=projicirenden Ebene der Verbindungslinie AB in die HE umklappen, so errichte man in den Endpuncten der H=Projection ab Senkrechte auf ihr, und gebe diesen Senkrechten nicht blos die absolute Länge der entsprechenden H=Distanzen, sondern beachte auch die Richtung der Distanzlinien. Sind nämlich die aus der VE zu entnehmenden Distanzlinien nach einerlei Seite von Grundschnitt aus gerichtet, so trägt man sie auch nach einerlei Seite von ab auf (wie es in Fig. 10 der Fall ist). Liegt aber in der VE die eine Distanzlinie oberhalb, die andere unterhalb des Grundschnitts, so trägt man die ihnen gleichen und auf ab senkrechten Linien in a und b nach entgegengesetzten Richtungen auf.

Aehnliches gilt für die verticale Umklappung der v=projicirenden Ebene von AB.

Aufl. II. Denkt man AB gezogen und durch B eine zu ihrer H=Projection parallele Geraden BC, welche das Projectionsloth Aa in C trifft, so erhält man die V=Projection a'b'c' des Dreiecks ABC, wenn man b'c' ∥ GS zieht. Nur die eine Kathete AC desselben projicirt sich in ihrer wahren Länge a'c'; wird aber das Dreieck um AC gedreht, bis seine Ebene der VE parallel ist, so werden auch seine beiden andern Seiten in wahrer Größe projicirt erscheinen. Da bei dieser Drehung der Punct B seine H=Distanz nicht ändert, mithin seine V=Projection fortwährend in der Richtung der Linie c'b' bleiben muß, und da es ferner klar ist, daß die wahre Länge der Kathete BC mit der Länge der H=Projection von AB übereinstimmt, Fig. 11.

so hat man nur $c'b_{\prime\prime} = ab$ zu machen und $a'b_{\prime\prime}$ zu ziehen, um in $a'b_{\prime\prime}c'$ die wahre Gestalt und Größe des Dreiecks ABC zu haben. Die Hypotenuse $a'b_{\prime\prime}$ zeigt die gesuchte Entfernung AB.

Ebenso kann man durch B eine Parallele BD zur V-Projection der AB ziehen, das Projectionsloth Aa′ bis zum Durchschnitte D mit BD verlängern, und das Dreieck ABD projiciren, nachdem man es durch Drehung um AD horizontal gelegt hat. Ist bd || GS, $db_1 = a'b'$, so ist abd die H-Projection des Dreiecks für seine ursprüngliche Lage; ab_1d für seine horizontale Lage; also $ab_1 = AB$.

Es läßt sich hieraus (wie in Aufl. I) eine Regel ableiten, die für alle Fälle gilt, die gegebenen Puncte A und B mögen liegen wie sie wollen.

§. 52.

Uebungsaufgaben.

1.) Gegeben: Die wahre Länge einer Geraden, die Projectionen ihres Aufangspuncts und eine Projection ihres Endpuncts. Gesucht: die andere Projection des Endpuncts.

2.) Ggb: Die Projectionen einer Geraden und eines Puncts in ihr. Ges: die Projectionen eines zweiten Puncts auf der Geraden, der von jenem einen gegebenen Abstand hat.

3.) Die Entfernung eines gegebenen Punctes von einer gegebenen Ebene anzugeben.

4.) Die Entfernung eines gegebenen Puncts von einer gegebenen Geraden anzugeben.

5.) Die Entfernung zweier paralleler Ebenen anzugeben.

6.) Eine Ebene einer gegebenen in bestimmter Entfernung parallel zu legen.

7.) Die H-Projection eines Puncts anzugeben, dessen V-Projection und dessen Entfernung von einer gegebenen Ebene bekannt sind.

8.) Die Entfernung zweier gegebenen Parallellinien anzugeben.

§. 53.

Aufg. Die Neigungen einer gegebenen Geraden gegen die Grundebenen darzustellen.

Aufl. Die Neigung einer Linie gegen eine Ebene ist (wie aus der Stereometrie bekannt) der Winkel der Linie mit ihrer Projection auf die Ebene.

Sind S, T' die Spuren der gegebenen Geraden, so liegt zwischen S, t und T' ein rechtwinkeliges Dreieck, welches bei S den Neigungswinkel α gegen die HE enthält. Man hat daher nur dieses Dreieck in eine Grundebene umzuklappen (§. 49), um es in seiner wahren Gestalt zeichnen und den Winkel α angeben zu können. Zwischen S, s' und T' ist ein anderes rechtwinkeliges Dreieck enthalten, welches bei T' den Neigungswinkel β der gegebenen Geraden gegen die VE faßt. Klappt man dieses Dreieck ebenfalls um, so findet man auch den Winkel β. (In Fig. 12 ist jedes dieser Dreiecke in beide Grundebenen umgeklappt.) Fig.12.

†) Läuft die gegebene Linie parallel mit einer der Grundebenen, so zeigen die Winkel ihrer Projectionen gegen den Grundschnitt die gesuchten Neigungen an.

††) Liegt die Linie in einer zum Grundschnitte senkrechten Ebene, so ergänzen sich beide Neigungswinkel zu 90°.

Zusatz. Fallen die Spuren der gegebenen Geraden, oder eine derselben, nicht mehr in das Zeichnungsblatt, so wähle man die Projectionen einer mit ihr parallelen so, daß man die Spuren dieser letztern bestimmen kann. Ihre Neigungswinkel gegen die Grundebenen werden mit den gesuchten übereinstimmen. Oder man nehme in der gegebenen Geraden zwei beliebige Puncte A, B an, denke sich durch B Parallelen BC, BD mit den Projectionen gezogen, bis sie die von A ausgehenden projicirenden Linien in C und D schneiden, und construire die Dreiecke ABC und ABD, wie es in Fig. 11 zu einem andern Zwecke bereits geschehen. Dann ist offenbar $\angle\, a'b''c' \;(= \angle\, ABC) = \alpha$,

$$\angle\, ab_1d \;(= \angle\, ABD) = \beta.$$

§. 54.

Uebungsaufgaben.

1.) Gegeben: Die H-Projection einer Geraden, ihre H-Spur und ihre H-Neigung. Gesucht: ihre V-Projection.

2.) Ggb: Die H=Projection einer Geraden, ihre H=Spur und ihre V=Neigung. Ges: ihre V=Projection.

§. 55.

Fig. 13. **Aufg.** Die Neigungswinkel einer gegebenen Ebene POQ′ gegen die Grundebenen zu finden.

Aufl. Die H=Neigung wird durch den Winkel der beiden Geraden gemessen, nach denen eine zur H=Spur senkrechte Ebene die gegebene Ebene und die HE schneidet. Die verticale Spur Q′q einer solchen Schnittebene ist senkrecht zum Grundschnitt, die horizontale qP senkrecht zu OP (§§. 9, 24). In Pq hat man sogleich einen Schenkel und in P die Spitze des gesuchten Neigungswinkels; der andere Schenkel (die Schnittlinie der Ebene PqQ′ und der gegebenen) hat den Punct Q′ zur V=Spur; der Winkel ist also in ein rechtwinkeliges Dreieck Q′qP geschlossen, und man erhält seine Größe α, wenn man dieses Dreieck in umgeklappter Lage QqP$_0$ zeichnet (§. 49).

Auf ähnliche Weise findet man die V=Neigung β.

†) Steht eine Ebene senkrecht auf der $\left\{\begin{smallmatrix}H\\V\end{smallmatrix}\right\}$=E, so ist ihre Neigung gegen die $\left\{\begin{smallmatrix}V\\H\end{smallmatrix}\right\}$=E dem Winkel gleich, den ihre $\left\{\begin{smallmatrix}H\\V\end{smallmatrix}\right\}$=Spur mit dem Grundschnitt einschließt.

††) Die G=Neigungen einer Ebene, welche dem Grundschnitt parallel ist, oder durch denselben geht, ergänzen sich zu 90°.

Zus. Die G=Neigung einer Ebene ist immer gleich der G=Neigung einer Geraden, welche in der Ebene senkrecht zur betreffenden Spur gezogen wird.

§. 56.

Uebungsaufgaben.

1.) Gegeben: Die H=Spur einer Ebene und ihre H=Neigung. Gesucht: Die V=Spur.

2) Ggb: Die H-Spur einer Ebene und ihre V-Neigung. Ges.: Die V-Spur.

(Wie verfährt man, wenn in beiden Aufgaben die gegebene Spur dem Grundschnitte nicht mehr innerhalb des Zeichnungsblattes begegnet?)

§. 57.

Aufg. Den Winkel zwischen zwei sich schneidenden Geraden (ab,a′b′), (ac,a′c′) zu zeichnen.

Aufl. Bestimmt man die H-Spur **ST** der Ebene **BAC**, sucht die Lage A_1 des Puncts **A** in der horizontalen Umklappung dieser Ebene (§. 50) und verbindet A_1 mit den H-Spuren **S** und **T** der gegebenen Geraden, so ist SA_1T der gesuchte Winkel. (Eben so könnte man die vertikale Spur von **BAC** und ihre verticale Umklappung benützen.) Fig. 14.

Liegen die Spuren der gegebenen Geraden so, daß die Ausführung dieser Construction unbequem wird, so nehme man man willkührlich einen Punct **B** auf **AB** und einen zweiten **C** auf **AC**, und construire das Dreieck **ABC** in seiner wahren Gestalt. Zu dem Ende müßte man die Länge der 3 Seiten suchen, also die Aufgabe des §. 51 dreimal lösen. Man kann aber mit einer zweimaligen Lösung auskommen, wenn man den Punct **C** so gewählt hat, daß er mit dem Puncte **B** einerlei H- oder V-Distanz hat. Denn sind z. B. die H-Distanzen einander gleich, wie in Fig. 14, so ist **BC** horizontal und projicirt sich auf die HE in wahrer Länge, so daß man nur noch von **AB** und **AC** die wirklichen Längen zu suchen hat.

Zusatz. Die Projection eines schiefen Winkels wird nur dann der wahren Größe desselben gleichkommen, wenn seine Ebene der Grundebene parallel ist (in welchem Falle seine Schenkel den Schenkeln der Projection parallel sind). Der rechte Winkel allein kann in unendlich vielen Stellungen sich wieder als rechter projiciren; in allen denjenigen Stellungen nämlich, wobei ein Schenkel der Grundebene parallel ist, mithin senkrecht auf der projicirenden Ebene des andern Schenkels steht.

§. 58.

Uebungsaufgaben.

1) Die V-Projection einer Linie zu zeichnen, welche mit einer gegebenen Linie einerlei H-Projection hat und jene in einem gegebenen Puncte unter einem gegebenen Winkel schneidet.

2) Ein Winkel ist durch die Projectionen seiner Schenkel gegeben; man soll die Projectionen seiner Halbirungslinie zeichnen.

§. 59.

Aufg. Die Neigung einer gegebenen Geraden M gegen eine gegebene Ebene E darzustellen.

Aufl. I. Fälle aus einem Puncte A der M eine Senkrechte auf E, projicire deren Fußpunct B, so wie den Schnitt C der M und E (§. 40), und construire das rechtwinkelige Dreieck ABC (indem man die Längen zweier Seiten sucht [§. 51]). Der Winkel an C ist der verlangte.

Aufl. II. Man fälle aus einem beliebigen Puncte der M eine Senkrechte L auf E und bestimme den Winkel zwischen M und L (§. 57). Dieser ist das Complement des gesuchten.

§. 60.

Aufg. Den Neigungswinkel zwischen zwei gegebenen Ebenen POR′ und PQR′ zu zeichnen.

Aufl. I. Man fälle aus einem beliebigen Puncte Senkrechte auf die gegebenen Ebenen (§. 44) und bestimme deren Winkel (§. 57). Dieser ist das Supplement des gesuchten. *).

---

*) Der Winkel beider Senkrechten könnte auch sogleich für die gesuchte Neigung selbst gelten, da zwei Ebenen immer zwei Winkel mit einander einschließen, welche sich zu 180° ergänzen.

Aufl. II. Man führe senkrecht zur Schnittlinie beider Ebenen eine dritte Ebene, und suche das Dreieck zu construiren, welches aus letzterer durch die gegebenen Ebenen und eine Grundebene geschnitten wird, und das bekanntlich den verlangten Winkel enthält. Dieses Dreieck läßt sich auf doppeltem Wege erhalten; nämlich:

a) Man kann beide Projectionen der Schnittlinie PR′ zeichnen, in dieser einen Punct (a, a′) beliebig wählen, die H=Spur BC der durch ihn senkrecht zu PR′ gelegten Ebene bestimmen (§. 45), die Lage A_1 des Punctes (a, a′) in der horizontalen Umklappung dieser Ebene suchen (§. 50) und A_1 mit den Puncten B und C verbinden, in denen BC die OP und QP trifft (und welche die H=Spuren der Schenkel des gesuchten Winkels sein müssen). Oder: Fig. 15.

b) Man zeichnet nur die H=Projection Pr der PR′, nimmt eine beliebige auf Pr Senkrechte BC als H=Spur einer auf PR′ senkrechten Hülfsebene an, und bestimmt in der horizontalen Umklappung derselben die Lage A_1 des Puncts A, in welchem sie der PR′ begegnet, auf folgende Weise. Die Ebene BAC wird von der projicirenden Ebene PrR′ nach einer Geraden DA geschnitten, welche auf PR′ senkrecht ist. Klappt man nun das Dreieck PrR′ in die HE nach PrR,, um und fällt DA,, senkrecht auf PR,,, so giebt DA,, die Entfernung des Punctes A von D an; und da die Umklappung A_1 in die Richtung von Pr fallen muß, so mache man $DA_1 = DA_{,,}$; dann ist BA_1C die Größe des gesuchten Winkels. (Bei andern Lagen der gegebenen Ebenen kann es bequemer sein, die Vertical=Spur der auf PR′ senkrechten Schnittebene den Constructionen auf ähnliche Weise zu Grunde zu legen, wie es hier mit der H=Spur geschah). Fig. 15.

†). In Fig. 16 sind die V=Spuren der gegebenen Ebenen parallel. Legt man durch die H=Spur P ihrer Schnittlinie eine Ebene Pp′R″ senkrecht zu dieser, und giebt in der verticalen Umklappung dieser Ebene die Lage Fig. 16.

P_1 des Punctes P an, so ist $R'P_1R''$ der gesuchte Winkel. (Eben so könnte man auch die horizontale Umklappung der Ebene $Pp'R''$ benützen).

Fig. 17. 18. ††) In Fig. 17 u. 18 liegen die gegebenen Ebenen parallel zum Grundschnitt. Ist nun POT′ eine zum Grundschnitt senkrechte Ebene und man klappt dieselbe in die HE um, so daß die Linien, in denen sie von den gegebenen Ebenen geschnitten wird, nach PP″ und TT″ zu liegen kommen, so ist PS″T der verlangte Neigungswinkel *).

Drittes Kapitel.

Polygone und Polyeder.

A. Polygon=Projectionen.

§. 61.

Die Projectionen eines Polygons sind gegeben, wenn man für jeden Eckpunct beide Projectionen hat; denn die Projectionen der Seiten ergeben sich durch Verbindung der entsprechenden Eckenprojectionen.

Läßt sich ein Polygon durch eine Diagonale so halbiren, daß je zwei Gegenseiten gleich und parallel sind, so kann es vollständig projicirt werden, sobald man die Projectionen der einen Hälfte kennt; denn von den Projectionen der fehlenden Seiten ist jede mit der Projection einer gegebenen Seite parallel und von gleicher Länge. Dieß gilt also insbesondere für alle Parallelogramme, und für reguläre Polygone von gerader Seitenzahl.

---

*) Dieselbe Hülfsebene POT′ hätte man statt der in Fig. 4. (§. 39) angewandten Ebene VWV′ benützen können, um die Schnittlinie (ab, a′b′) der gegebenen Ebenen zu finden. Das hiebei zu befolgende Verfahren ist aus den Figuren 17 u. 18 zu erkennen und leicht zu verstehen.

§. 62.

Hat ein Polygon keinen einspringenden Winkel, so kann auch seine Projection keinen einspringenden Winkel haben. Denn angenommen, es projicire sich der ausspringende Winkel ABC als einspringender Winkel abc, so denke man sich die Diagonale AC und ziehe deren Projection ac; dann würden die Winkelspitzen B und b auf entgegengesetzten Seiten der projicirenden Ebene ACca liegen, was unmöglich ist, da das Projectionsloth Bb parallel mit dieser Ebene sein muß.

Kein Winkel eines Polygons kann als Projection einen flachen geben, wenn nicht auch die Projectionen aller übrigen Winkel flach oder Null werden (d. h. wenn nicht die Projection des ganzen Polygons in eine gerade Linie fällt). Denn wäre die Projection des Winkels ABC ein flacher, so würde die projicirende Ebene der Seite AB zugleich durch die Seite BC, mithin auch durch alle übrigen Seiten gehen, oder die Projectionen sämmtlicher Seiten müßten in der Spur dieser projicirenden Ebene zusammenfallen.

Durch Beachtung dieser Sätze kann man öfters bei dem Projiciren gegebener Polygone auf Constructionsfehler aufmerksam gemacht werden.

§. 63.

Aufg. Von einem Polygon ABCD... sind drei Ecken (a, a′), (b, b′), (c, c′) auf beide Grundebenen, die übrigen Ecken nur auf die H=Ebene projicirt. Man soll die fehlenden V=Projectionen d′, e′, ... finden.

Aufl. Statt die Aufgaben der §§. 41 und 38 zu lösen, kann man kürzer so verfahren:

Man ziehe die Projectionen der AB, BC, AC und die H=Projection bd der Diagonale BD, welche die Diagonale Fig.19.

AC in V schneidet. Aus der H=Projection v dieses Puncts bestimme man die zugehörige V=Projection v′ (§. 37), ziehe b′v′ und suche nach §. 37 die V=Projection d′ des Ecks D. Auf dieselbe Weise ergeben sich die V=Projectionen der übrigen Ecken.

Anstatt der Diagonalen kann man auch je zwei verlängerte Seiten benützen, wenn ihr Schnittpunct nicht in zu große Entfernung fällt. So wird man z. B. den Punct e′ erhalten, wenn man cb, ea und c′b′ verlängert, die zum Schnitt t gehörige V=Projection t′ angiebt (§. 37), t′a′ zieht und auf ihrer Verlängerung die zu e gehörige V=Projection bestimmt (§. 37).

§. 64.

Uebungsaufgabe.

Zu untersuchen, ob n beliebig gegebene Puncte als Ecken eines Polygons gelten können (d. h. ob sie in einer Ebene liegen).

§. 65.

Aufg. Aus den gegebenen Projectionen eines Polygons dieses selbst zu zeichnen.

Aufl. Man kann das Polygon von einem Eck aus durch Diagonalen in Dreiecke zerlegt denken, diese Dreiecke aus ihren Seiten construiren (§. 51) und zusammensetzen. Meist aber ist es einfacher, die H=Spur der Polygonsebene zu bestimmen (§. 41) und die Lage sämmtlicher Ecken nach horizontaler Umklappung dieser Ebene zu suchen (§. 50).

§. 66.

Aufg. In einer Ebene, welche PO zur H=Spur hat und gegen die H=Ebene unter $\angle\alpha$ geneigt ist, liegt ein Polygon ABC... so, daß es nach horizontaler Umklappung der Ebene in der Lage $A_1B_1C_1$... erscheint. Man verlangt die Projectionen desselben für die ursprüngliche Stellung der Ebene.

Aufl. Man fälle $A_1F \perp OP$. Während sich die Fig. 20. Ebene des Polygons in ihre ursprüngliche Stellung zurückbewegt, beschreibt der Punct A_1 einen Kreisbogen, dessen Mittelpunct F ist, dessen Ebene senkrecht zur HE steht, und zu welchem α als Centriwinkel gehört. Die horizontale Umklappung des diesem Bogen entsprechenden Sectors erhält man, wenn man $\angle A_1FA_{,,} = \alpha$ macht und den Bogen $A_1A_{,,}$ um F beschreibt. Fällt man dann $A_{,,}a \perp A_1F$, so ist a die H-Projection und $A_{,,}a$ die H-Distanz des Ecks A, dessen V-Projection a′ nun sogleich (nach §. 36) gefunden wird. — Ganz auf dieselbe Weise ergeben sich die Projectionen der übrigen Ecken B, C, ꝛc.

Will man aber von den Sectoren, welche durch die Radien A_1F, B_1G, C_1H,... beschrieben werden, nicht jeden einzeln umklappen (was bei einem Polygon von größerer Seitenzahl allerdings die Zeichnung mit Linien überlädt), so legt man eine neue VE senkrecht zu OP, projicirt auf sie das Polygon, bestimmt mittelst dieser V-Projection die H-Projectionen und H-Distanzen der Ecken, und geht dann auf die ursprüngliche VE zurück. Ist AQ Fig. 25. der neue Grundschnitt, so projicirt sich in diesen das umgeklappte Polygon (z. B. das Eck C_1 nach c′), und nach der Zurückbewegung der Ebene des letztern fallen die V-Projectionen sämmtlicher Ecken in die Gerade Ac′, welche mit AQ den Winkel α einschließt. Während jener Bewegung beschreibt der Punct C_1 einen mit der neuen VE parallelen Kreisbogen, welcher zum Halbmesser die auf OP senkrechte C_1P hat, und dessen V-Projection also der mit Ac′ beschriebene Bogen c′c′ ist, während die H-Projection in C_1P fällt. Daher ist c′ die Projection von C auf der VE AQ; die H-Projection c ergiebt sich nach §. 37 und die zugehörige V-Projection auf der ursprünglichen V-Ebene nach §. 36, Zus. Eben so behandle man die übrigen Ecken, und zeichne durch Verbindung der erhaltenen Puncte die Projectionen des Polygons.

(Hat man die B=Ebene AQ durch ein Eck A gelegt, wie in der Figur angenommen wurde, so erspart man für dieses Eck das Ziehen der Senkrechten auf AQ). — In Fig. 20 hätte man A_1F als neuen Grundschnitt betrachten und im Uebrigen eben so verfahren können wie in Fig. 25.

B. Polyeder=Projectionen.

§. 67.

Ein Polyeder ist völlig gegeben, wenn man die Projectionen jedes einzelnen Ecks kennt, und zugleich weiß, wie die Ecken paarweise (als Endpuncte je einer Kante) zusammengehören. Die Länge einer Kante oder Diagonale läßt sich nach §. 51 finden; die Gestalt und Größe einer Seite nach §. 65; die Größe eines Winkels *) nach §. 60 (wenn man vorher die Spuren seiner Schenkelebenen sucht).

§. 68.

Insofern die Projection eines Körpers immer ein klares Bild desselben hervorrufen soll, kann man der Anschauung auf eine wirksame Weise dadurch zu Hülfe kommen, daß man in der Zeichnung diejenigen Kanten, welche dem Auge unmittelbar sichtbar wären, von jenen unterscheidet, welche erst durch die Seitenflächen hindurch gesehen werden müßten, wenn nämlich das Auge für jeden einzelnen Punct in der Richtung seines projicirenden Lothes gedacht wird, und zwar in hinreichender Entfernung von der Grundebene. Die Projectionen solcher Kanten, welche durch Seitenflächen verdeckt sind, werden punctirt angegeben. (Die punctirten Kanten dürfen aber nicht mit solchen Projectio-

---

*) Der Winkel eines Polyeders ist die Neigung zwischen den Ebenen zweier benachbarten (d. h. in einer Kante zusammenhängenden) Seiten, und muß wohl unterschieden werden von dem Winkel einer Polyederseite (der Neigung zwischen benachbarten Kanten).

nen verwechselt werden, welche ihrer Lage auf der hintern HE oder untern VE wegen punctirt gezeichnet sind).

§. 69.

Aufg. Das Netz eines Polyeders zu zeichnen, dessen Projectionen bekannt sind.

Aufl. Man construirt sämmtliche Seiten (§. 65) und legt sie mit entsprechenden Kanten in einer Ebene aneinander.

§. 70.

Zur Lösung der Aufgabe: ein Polyeder in gegebener Stellung zu projiciren, sind zweierlei Bestimmungsstücke erforderlich; nämlich 1) diejenigen Stücke, durch welche das Polyeder an sich im Raume bestimmt wird, und 2) die nöthigen Angaben, aus denen seine Stellung gegen die Grundebenen erhellt. Hiernach kann man die Auflösung selbst in zwei Theile trennen, indem man den Körper zunächst mittels der ersten Bestimmungsstücke auf ein beliebiges, möglichst bequem gewähltes Grundsystem projicirt, und ihn dann erst in die vorgeschriebene Stellung gegen dieses System bringt, wozu später (§. 76) die Mittel an die Hand gegeben werden sollen.

In den beiden ersten der nachfolgenden Beispiele kann vorläufig das Grundsystem nach Gutdünken gewählt werden. Auch soll für den darzustellenden Körper nur die H-Projection sammt den H-Distanzen der einzelnen Ecken gesucht werden; die Projection auf einer beliebigen VE läßt sich dann leicht nach §. 36 hinzufügen.

§. 71.

Aufg. Drei von demselben Eck ausgehende Kanten AB, AC, AD eines Parallelepipeds sind gegeben und die drei Winkel zwischen ihnen. Man soll das Parallelepiped projiciren und sein Netz zeichnen.

Fig. 21. **Aufl.** Man wähle die Ebene zweier gegebenen Kanten AB, AC zur HE, lege in ihr die drei Winkel aneinander, und schneide auf den Schenkeln die Stücke AB, AC, $AD_1 = AD_{,,} = AD$ ab. Werden dann die Ebenen BAD_1 und $CAD_{,,}$ um AB und AC gedreht, bis AD_1 mit $AD_{,,}$ in AD zusammenfällt, so ergiebt sich die Projection d des Ecks D als Schnitt der beiden Senkrechten, welche man von D_1 uud $D_{,,}$ auf AB und AC fällt. Die Projectionen der übrigen Kanten kann man sogleich zeichnen, da sie den Linien AB, AC, Ad gleich und parallel sind.

Die vier nicht in der HE liegenden Ecken haben einerlei H-Distanz Dd, welche man als Kathete eines rechtwinkeligen Dreiecks erhält, zu dessen beiden andern Seiten entweder vd und vD_1, oder Ad und AD_1 genommen werden.

(Zeichnung des Netzes).

Vollendet man die Parallelogramme D_1B und $D_{,,}C$, so hat man die Umklappungen der Seitenflächen DB und CD. Die Umklappung der Seitenfläche CG findet man, wenn man $E_1 e w \perp Cw$ fällt, $CE_1 = CE_{,,}$ macht und das Parallelogramm vollendet. Eben so ergiebt sich die Umklappung von BG. Man hat nun zur Vervollständigung des Netzes nur noch die Seite DG entsprechend anzufügen. Soll dieß etwa an F_1G_1 geschehen, so macht man $F_1D_{,,,} = fd$, $G_1D_{,,,} = gd$, und vollende das Parallelogıamm $G_1D_{,,,}$.

§. 72.

Aufg. Eine Pyramide zu projiciren, wenn ihre Basis ABC..., ihre Höhe h und die an AB liegende Seite gegeben sind; wobei der Fußpunct der Höhe auf dieselbe Seite von AB fallen soll, auf welcher D liegt.

Fig. 22. **Aufl.** Nimmt man die Ebene der Basis als HE und construirt über AB die gegebene Seite, so fällt die

H=Projection s der Spitze S in die auf AB senkrechte S_1v.., und ihre Lage ist bestimmt, sobald man eine der Entfernungen vs oder As kennt. Um diese zu finden, construirt man entweder das Dreieck Ssv (aus der Hypotenuse S_1v und der Kathete h) oder das Dreieck SsA (aus der Hypotenuse S_1A und der Kathete h).

(Wie erhält man am leichtesten das Netz der Pyramide?)

§. 73.

Uebungsaufgaben *).

1) Einen Würfel } zu projiciren, wenn die HE durch
2) Ein reguläres Tetraeder } eine Seitenfläche gelegt ist.

3) Ein reguläres Octaeder zu projiciren, dessen Axe senkrecht auf der HE steht.

4) Den Würfel } zu projiciren, wenn eine Kante in der HE
5) Das Tetraeder } liegt, während die in dieser Kante zusam-
6) Das Octaeder } menstoßenden Seitenflächen gleiche H-Neigung haben.

§. 74.

Aufg. Das reguläre Ikosaeder bei gegebener Kantenlänge zu projiciren, wenn eine Axe AB desselben senkrecht auf der HE steht.

Aufl. Sind U die Endpuncte der von A ausgehenden und O die Endpuncte der von B ausgehenden Kanten, so bestimmen die Puncte o mit den Puncten u ein reguläres Zehneck. Die Puncte U liegen in einer horizontalen Ebene, und eben so die Puncte O; daher zeigt jede Seite des Fünfecks $U_1U_2U_3$... oder $O_1O_2O_3$... die wahre Länge der Ikosaederkante. Hiernach ist die H-Projection des Körpers leicht zu zeichnen. Fig. 23.

Die Höhe p der Pyramiden, welche durch die Ebenen UU.. und OO.. vom Ikosaeder abgeschnitten werden, ist

---

*) Die Eigenschaften der 5 regulären Körper, welche in §§. 73—75 zur Sprache kommen, werden als bekannt (aus der Stereometrie) vorausgesetzt.

die Kathete eines rechtwinkeligen Dreiecks, dessen andere Kathete Au_1 und dessen Hypotenuse u_1u_2 (nämlich die wahre Länge der Körperkante) ist. Die Höhe t des trommelartigen Körpers, welcher nach Abzug der beiden Pyramiden vom Ikosaeder übrig bleibt, findet man auf ähnliche Weise (entweder mittels der Linien u_1o_4 und u_1u_2, oder mittels der Linie u_1v und der wahren Höhe der Ikosaederseite). Dann hat man folgende H-Distanzen:

o für den Punct A
p „ die Puncte U
p + t „ „ „ O
2p + t „ den Punct B,

und kann mittels derselben den Körper auf jede beliebig gewählte VE projiciren (§. 36).

§. 75.

Aufg. Ein reguläres Dodekaeder von gegebener Kantenlänge zu projiciren, wenn eine Kante A_1A_2 in der HE liegt und die in dieser Kante zusammenhängenden Seiten gleiche H-Neigung haben.

Fig. 24. **Aufl.** Eine durch die Kante A_1A_2 und deren Gegenkante B_1B_2 gelegte Ebene steht vertical, so daß die H-Projection b_1b_2 der letztern Kante auf A_1A_2 fällt. Die H-Projectionen der beiden in B_1B_2 aneinander grenzenden Seitenflächen sind unter sich congruent und fallen mit den Projectionen der beiden an A_1A_2 liegenden Seiten zusammen.

Die an A_1A_2 liegenden Fünfecke seien mit den Buchstaben A,U,D bezeichnet; die an B_1B_2 liegenden mit B,O,E. — Da (nach dem Obigen) die Puncte e auf die Puncte d fallen, so stehen die Kanten D_1E_1 und D_2E_2 vertical, mithin auch die Ebenen der an ihnen liegenden vier Fünfecke, und diese projiciren sich also auf die HE als gerade Linien dm. Die Linien A_1A_2, u_1u_2, u_3u_4

werden durch d_1d_2 senkrecht halbirt; U_1U_2 und U_3U_4 liegen horizontal, also auch U_1U_4 und U_2U_3; daher stellt jede Seite des Vierecks $u_1u_2u_3u_4$ die Diagonale der Dodekaederseite in wahrer Größe dar, und das Viereck selbst ist ein Quadrat. Die Kanten M_1M_2 und M_3M_4 müssen (da sie mit U_2U_3 und U_1U_4 parallel sind) horizontal liegen und sich in wahrer Größe projiciren. Eine durch die vier Puncte M geführte Ebene halbirt die Kanten D_1E_1 und D_2E_2 senkrecht, liegt also selbst horizontal. Die Linie m_1d_1 ($= m_3d_1 = m_4d_2 = m_2d_2$) stellt die Höhe der Dodekaederseite in wahrer Größe dar; o_2d_1 und o_2m_1 sind die beiden Stücke dieser Höhe, in welche sie durch die Diagonale O_2U_2 zerlegt wird. Die verlängerte A_1A_2 halbirt m_1m_2 und m_3m_4 senkrecht in v und w; vw zeigt die wahre Länge der durch die Mittelpuncte von M_1M_2 und M_3M_4 gehenden Axe, und d_1d_2 die Länge der Axe zwischen den Kanten D_1E_1 und D_2E_2; daher ist $d_1d_2 = vw$ und beide halbiren sich. — Die vorstehenden Auseinandersetzungen leiten nicht nur auf eine einfache Construction der H-Projection, sondern auch auf mehrere Proben für die Genauigkeit dieser Construction. Man wird zuerst das Quadrat $u_1u_2u_3u_4$ zeichnen, dann die Puncte A bestimmen, hierauf die Puncte d und endlich die Puncte m. (Ist das Fünfeck $\mathfrak{U}_1\mathfrak{D}_1\mathfrak{U}_2$ .. der Dodekaederseite congruent, und $\mathfrak{D}_1\mathfrak{E} \perp \mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2$, so ist $u_1u_2 = \mathfrak{U}_1\mathfrak{U}_2$; d_1 ist der Durchschnittspunct zweier um u_1 und u_2 beschriebener Bögen vom Halbmesser $\mathfrak{R}\mathfrak{E}$; m_1 findet man, wenn man d_1u_2 zieht und um das Stück $\mathfrak{D}_1\mathfrak{R}$ verlängert; u. s. w.)

Legt man eine VE durch D_1E_1 unter gleichen Winkeln gegen die in D_1E_1 zusammenhängenden Seiten (also parallel mit A_1A_2), so hat gegen diese das Dodekaeder ganz dieselbe Stellung, wie gegen die HE; daher wird die V-Projection desselben seiner H-Projection congruent sein und sich von letzterer nur in der Lage gegen den Grundschnitt unterscheiden. Denkt man sich nämlich eine der

H=Projection congruente Figur über dem Grundschnitt d_1g so gezeichnet, daß m_1m_2 in d_1g und v in d_1 fällt, so ist diese Figur die V=Projection. Hieraus ersieht man, daß die H=Distanzen der Dodekaederdecken unmittelbar auf der Geraden vw abgenommen werden können, und zwar in folgender Art:

o	ist	die	H=Distanz	der	Puncte	A
vs	„	„	„	„	„	U
vb_2	„	„	„	„	„	D
vc	„	„	„	„	„	M
vb_1	„	„	„	„	„	E
vt	„	„	„	„	„	O
vw	„	„	„	„	„	B

Hiernach läßt sich also der Körper leicht auf jede beliebige andere VE projiciren (§. 36.)

§. 76.

Aufg. Einen Körper, dessen Bestimmungsstücke gegeben sind, zu projiciren, wenn seine Stellung gegen die Grundebenen in folgender Weise vorgeschrieben ist:

1.) Die Ebene E einer bestimmten Seite Z hat eine gegebene H=Neigung α;

2.) eine bestimmte Kante K in dieser Seite bildet mit der H=Spur der Ebene E einen gegebenen Winkel φ;

3.) Die H=Spur der Ebene E schließt mit dem Grundschnitt einen gegebenen Winkel ψ ein.

Aufl. Durch die Angaben (1) und (2) ist die Stellung des Körpers gegen die HE, also auch die Figur der H=Projection bestimmt; und indem die Angabe (3) hinzukommt, bestimmt sich auch die Figur der V=Projection. Nur die Entfernungen der beiden Projectionen vom Grund=

schnitt bleiben willführlich, da man die Grundebenen noch in beliebigen Abständen vom Körper annehmen kann.

(Sollten auch diese Abstände bestimmte Werthe haben, so müßten für ein bestimmtes Eck beide G-Distanzen gegeben sein.)

Man klappe zuerst die Ebene E sammt dem mit ihr festverbundenen Körper in die HE um, projicire auf diese umgeklappte Ebene den Körper, bewege dann die Ebene sammt dem Körper in die ursprüngliche Lage zurück, und suche aus jener Hülfsprojection die neue H-Projection des Körpers und die H-Distanzen seiner Ecken abzuleiten.

Um die Ausführung an einem Beispiele zu erläutern, sei eine Pyramide ABCS gegeben, in welcher die Basis ABC als die Seite Z gilt, AB als die Kante K. Die HE gehe durch das Eck A. Zur Bestimmung der Pyramide an sich mögen dieselben Stücke als bekannt angenommen werden wie in §. 72.

Es sei AO die H-Spur der Ebene ABC. Denkt Fig. 25. man sich diese Ebene sammt der darauf stehenden Pyramide in die HE umgeklappt, so nimmt die Umklappung AB_1C_1 eine solche Lage ein, daß $\angle B_1AO = \varphi$. Man zeichne für diese Lage die H-Projection AB_1C_1s der Pyramide (§. 72), und bewege hierauf die Ebene ABC wieder in ihre ursprüngliche Lage zurück. Dann fallen die neuen H-Projectionen der Ecken in die aus B_1, C_1, s auf AO gefällten Senkrechten. Führt man eine zu AO senkrechte VE AQ ein, so würde die V-Projection der Basis vor der Zurückbewegung in den Grundschnitt fallen; die V-Projection der Spitze läge in der Verlängerung der auf AQ senkrechten sm, und zwar von m um die gegebene Höhe h entfernt, so daß man die V-Projection der ganzen Pyramide leicht zeichnen könnte. Die Figur dieser V-Projection kann sich aber während jener Zurückbewegung nicht ändern, sondern dreht sich blos um A so, daß am Ende der Bewegung die Grundlinie Ac′ mit ihrer ersten

Lage Ac′ (in AQ) den Winkel α einschließt. Sie bestimmt sich daher, wenn man

$$\angle QAc' = \alpha$$
$$Ab' = Ab'$$
$$Ac' = Ac'$$
$$Am = Am$$
$$\angle Ams' = 90^\circ$$
$$ms' = h$$

macht. Es ist nicht nöthig, die V=Projectionen der Kanten zu ziehen, da man die V=Projectionen b′, c′, s′ der Ecken nur in der Absicht gesucht hat, um durch sie (nach §. 37) die zugehörigen H=Projectionen b, c, s zu erhalten. Sind diese gefunden, so vertausche man die VE AQ mit der vorgeschriebenen VE, welche die AO unter $\angle \psi$ schneidet, trage auf diese die V=Projectionen der Ecken über (nach §. 36, Zus.) und führe die Projectionen der Pyramide vollständig aus.

(Zur Uebung gebe man dem in §. 71 projicirten Körper eine andere Stellung gegen die Grundebenen und suche seine neuen Projectionen.)

C. Schnitte der Polyeder durch Ebenen.

§. 77.

Wird ein gegebenes Polyeder durch eine gegebene Ebene geschnitten, so erhält man die Projectionen der Durchschnittsfigur, wenn man die Schnittpuncte der Polyederkanten mit der gegebenen Ebene sucht (§. 40) und gehörig verbindet. Die wahre Durchschnittsfigur läßt sich nach §. 65 finden.

Die Lösung der hieher gehörigen Aufgaben wird am einfachsten, wenn die Schnittebene senkrecht auf einer Grundebene steht. Denn dann fällt eine Projection der Schnittfigur in die Spur der Ebene, und die Umklappung der Figur mit der Ebene läßt sich bequem ausführen (vgl. §. 50, †).

§. 78.

Aufg. In einer Seite F eines gegebenen geraden Prisma's ist eine Gerade parallel mit der Basis gezogen und durch diese Gerade eine Ebene unter gegebener Neigung φ gegen die erwähnte Seite F gelegt. Man soll das Netz des Körpers zeichnen, welcher durch die Ebene vom Prisma abgeschnitten wird.

Aufl. Legt man die HE durch die Basis des Prisma's und die VE senkrecht zur Seite F, so steht auch die Schnittebene senkrecht zur VE; ihre V-Spur bildet mit dem Grundschnitt den Winkel $90° - \varphi$ und enthält die V-Projection des Schnitts; die H-Projection desselben ist die Basis des Prisma's.

Die horizontale Umklappung der Schnittfigur mit ihrer Ebene ergiebt sich nach § 50, †. Die übrigen Seiten des abgeschnittenen Körpers sind ganz leicht zu erhalten, so daß die Herstellung des Netzes keine Schwierigkeit hat.

§. 79.

Aufg. Ein schiefes Prisma senkrecht zu den parallelen Kanten zu schneiden und das Netz zu zeichnen.

Aufl. Man lege die HE durch die Basis, die VE parallel zu den Seitenkanten, zeichne die Spuren der Schnittebene (§. 24), bestimme die H-Projection des Schnitts (§.37) und mittels derselben die Schnittfigur selbst (§. 50,†). Die übrigen Seiten des Netzes sind rechtwinkelige Trapeze, deren Basen Seitenlinien der Schnittfigur und deren parallele Seiten aus der VE zu entnehmen sind (§. 26).

Ist das Prisma dreiseitig, so kann man das Netz auch leicht dadurch erhalten, daß man die gebrochene Oberfläche des Prismas in eine Ebene ausbreitet (d. h. die drei Seitenparallelogramme construirt und aneinanderlegt) und die parallelen Kanten durch eine Gerade G senkrecht

schneidet. Dann ergeben sich sogleich die Trapeze, welche die Seiten des abgeschnittenen Körpers bilden; und wenn man aus den in diese Trapeze fallenden Stücken jener Geraden G ein Dreieck construirt, so hat man die Schnittfigur.

§. 80.

Aufg. Eine Pyramide, deren Basis in der HE liegt, wird durch eine gegebene Ebene POQ′ geschnitten. Man soll die Schnittfigur projiciren und das Netz der abgestumpften Pyramide zeichnen.

Fig. 26. **Aufl.** Den Punct (e, e′), in welchem die Kante AS die Ebene POQ′ durchdringt, findet man nach §. 40. Eben so könnte man auch die übrigen Puncte der Schnittfigur aufsuchen.

Da aber die Schnittlinie EF zwischen der Ebene POQ′ und der Seitenfläche ASB ihre H-Spur sowohl in PO als in der Richtung von AB haben muß, also in R, so erhält man die H-Projection ef von EF durch Verbindung von R und e (und erforderliche Verlängerung); der Schnitt f von Re.. und Bs ist die H-Projection des Punctes, in welchem die Kante BS die gegebene Ebene trifft. Aus gleichen Gründen ist Tf die H-Projection der Schnittlinie zwischen den Ebenen POQ′ und BCS, mithin g die H-Projection des Schnittpuncts zwischen POQ′ und der Kante CS. Der Punct g führt mittels Ug auf die H-Projection h des Punctes, wo SD die Ebene POQ′ trifft; und endlich muß (zur Probe) die Verbindungslinie Vh verlängert durch e gehen. — Die V-Projectionen der Puncte E, F, G, H ergeben sich nach §. 37. (Fällt man aus R eine Senkrechte Rr′ auf den Grundschnitt, so müssen r′, e′, f′ in gerader Linie liegen. Auf ähnliche Genauigkeits-Proben leiten die Puncte T, U, V.)

Weit einfacher würde die Auflösung werden, wenn die gegebene Ebene senkrecht zur VE läge.

(Zeichnung des Netzes).

Macht man $sS_1 \perp AB$, $mn = sv$, $vS_1 = ns'$, so ist AS_1B die Umklappung der Seite ASB; die Lage der Linie EF in dieser Umklappung findet man mittels der beiden auf AB Senkrechten eE_1 und fF_1. Will man die Seite ADS umklappen, so erhält man die Lage S_2 der Spitze S, wenn man $sS_2 \perp AD$ und $AS_2 = AS_1$ macht; und die Lage der EH durch zwei auf AD aus e und h gefällte Senkrechte. So wird man auch mit den beiden übrigen Seiten verfahren, und zuletzt etwa an E_1F_1 die Schnittfigur EFGH in richtiger Lage anfügen. Diese Schnittfigur selbst aber läßt sich zeichnen, wenn man noch die wahre Länge einer Diagonale sucht (§. 51); denn die wahren Größen der vier Seiten sind bereits bekannt.

Statt das Netz des Körpers auf dem eben angedeuteten Wege zu zeichnen, kann man auch die wahren Längen der von S ausgehenden Kanten, so wie der auf ihnen abgeschnittenen Stücke SE, SF, SG, SH nach §. 51 suchen, die Schnittfigur durch Umklappung der Ebene POQ' nach §. 65 construiren, und dann die Stücke des Netzes so zusammensetzen, wie Fig. 26 b zeigt.

§. 81.

Uebungsaufgabe.

Eine Pyramide, deren Basis nicht in der HE liegt, wird durch eine Ebene geschnitten, welche eine bestimmte Kante senkrecht halbirt. Man verlangt die Projectionen der Schnittfigur und das Netz der abgestumpften Pyramide.

D. Schnitte der Polyeder unter sich.

§. 82.

Der Schnitt eines Polyeders durch ein zweites giebt in den meisten Fällen eine Figur solcher Art, daß die Seitenlinien in verschiedenen Ebenen liegen.

Verschwindet bei einem solchen Durchschnitt ein Theil des einen Polyeders ganz im zweiten, ohne an einer andern Stelle wieder zum Vorschein zu kommen, so sagt man, das erste dringe ein in das zweite. Fällt ein Stück des einen ganz innerhalb des zweiten, doch so, daß die Endstücke des ersten beiderseits aus letzterem vorragen, so durchdringt das erste das zweite. Nimmt jedes ein Stück vom andern hinweg, ohne daß das eine an irgend einer Stelle vom andern ganz umschlossen wird, so schneiden sich beide gegenseitig aus (Fig. 27). Im ersten und letzten Falle ist die Schnittfigur eine einzige gebrochene, in sich geschlossene Linie; im zweiten besteht sie aus getrennten Stücken.

Sind die beiden Polyeder durch ihre Projectionen gegeben, so erhält man die Projectionen des Schnitts, wenn man die Puncte, in denen die Seiten des ersten von den Kanten des zweiten getroffen werden, mit den Puncten, in welchen die Kanten des ersten den Seiten des zweiten begegnen, in gehöriger Ordnung verbindet. Wie man sich hiebei zu benehmen haben, um einer zu verwickelten Zeichnung auszuweichen, soll an einem Beispiele gezeigt werden.

§. 83.

Fig. 27. **Aufg.** Ein Prisma und eine Pyramide sind durch ihre Projectionen gegeben. Man soll ihren Durchschnitt projiciren, und die Seiten der Schnittfigur auf dem Netze jedes Körpers angeben.

Aufl. Die h-projicirende Ebene der Kante DG des Prima's schneidet drei Kanten AC, AS, AB der Pyramide in den Puncten U, V, W, deren H-Projectionen die Puncte u, v, w sind, und deren V-Projectionen man nach §. 37 findet; die Pyramide selbst wird also durch jene projicirende Ebene nach einem Dreieck UVW geschnitten, und die

Puncte, in denen die Kante DG die Pyramide trifft, können nirgend anders liegen, als in den Seiten dieses Dreiecks. Zeichnet man seine V=Projection v′u′w′, so findet man die V=Projectionen p^I, p^{II} dieser Puncte, und hieraus auch (nach §. 37) die H=Projectionen p_1, p_2. Eben so ergeben sich die Puncte (p_3, p^{III}), (p_4, p^{IV}), in welchen die Pyramide von der Prismenkante EH geschnitten wird. Wendet man dasselbe Verfahren auch auf die Kante FJ an, so wird man finden, daß ihre V=Projection f′i′ die V=Projection der Figur, nach welcher ihre h=projicirende Ebene die Pyramide schneidet (und welche hier ein Viereck ist), gar nicht trifft, woraus folgt, daß die Kante FJ selbst neben der Pyramide hinläuft, ohne ihr zu begegnen. — Die Puncte Q, in denen die Kanten der Pyramide die Seiten des Prisma's durchdringen, findet man auf ähnliche Weise. Die h=projicirende Ebene der Kante SB schneidet das Prisma nach einem Dreieck XYZ, dessen V=Projection x′y′z′ von der V=Projection s′b′ jener Kante in den Puncten q^I, q^{II} getroffen wird; und wenn man (nach §. 37) die zugehörigen H=Projectionen q_1, q_2 bestimmt, so hat man in (q_1, q^I), (q_2, q^{II}) die Schnittpuncte der Kante SB mit den Seiten GF und HF des Prima's. Die Pyramidenkante SC begegnet den Prismenseiten GF, HF in den Puncten (q_3, q^{III}), (q_4, q^{IV}). Die Kante SA trifft das Prisma gar nicht. Daß auch keine der Kanten an der Basis ABC das Prisma schneiden kann, ersieht man unmittelbar aus den V=Projectionen der gegebenen Körper. — Es kommt nun noch darauf an, die erhaltenen Puncte P und Q gehörig durch Gerade zu verbinden, welche dann die Schnittlinien der Seiten beider Körper darstellen. Hiebei beachte man, daß immer zwei solche Puncte verbunden werden müssen, welche in einer und derselben Seite des Prisma's und zugleich in einer und derselben Seite der Pyramide liegen. Nun liegen z. B. die Puncte P_1 und P_3 beide in der Seite DH des Pris=

ma's und beide in der Seite ASC der Pyramide; also ist P_1P_3 der Schnitt jener Prismenseite mit dieser Pyramidenseite. Eben so ist P_3Q_4 der Schnitt von HF und ASC. Fährt man so fort, so findet man $P_1P_3Q_4Q_2P_4P_2Q_1Q_3P_1$ als Figur des Schnittes beider Körper.

(Es ist klar, daß man zur Auffindung der Puncte P und Q statt der h-projicirenden Ebenen der Kanten auch die v-projicirenden hätte anwenden können; oder auch die h-projicirenden Ebenen der Prismenkanten und die v-projicirenden der Pyramidenkanten; oder umgekehrt.)

Zeichnung des Netzes.

A.) Für die Pyramide. Ist das Netz der vollständigen Pyramide entworfen (indem jedes Dreieck aus seinen drei Seiten construirt wurde), so bestimme man auf der Kante SC die Puncte Q_3 und Q_4, indem man entweder die wahren Längen von SQ_3 und SQ_4 sucht, oder SC in Q_3 und Q_4 so theilt, daß

$$SQ_3 : SQ_4 : SC = sq_3 : sq_4 : sC.$$

Zieht man die Gerade sp_1r, theilt AC in R im Verhältniß von ar : rc und SR im Verhältniß von $sp_1 : p_1r$, so findet man im Dreieck SAC den Punct P_1; ähnlich erhält man den Punct P_3 und kann nun das Stück $P_1P_3Q_4Q_3$ der Schnittfigur in der Seite SAC des Netzes zeichnen. Auf dieselbe Weise trägt man die übrigen Stücke in die betreffenden Seiten über.

B.) Für das Prisma. Man ziehe die Gerade hq_2k, construire das Dreieck HKJ aus seinen drei Seiten, theile KH in Q_2 im Verhältniß von $kq_2 : q_2h$, setze an JK ein Stück KF so, daß

$$FK : KJ = fk : ki$$

und vollende das Parallelogramm FH, so hat man eine Seite des Prisma's und in ihr einen Eckpunct Q_2 der Schnittfigur. Auf der Kante HE trage man die Puncte P_3 und P_4 auf. Um den vierten Punct in dieser Seite

zu erhalten, lege man durch q_4 eine Gerade, welche zugleich entweder durch ein Eck des Parallelogramms fh geht oder mit einer seiner Seitenlinien parallel läuft, trage diese Gerade in die Seite FH des Netzes über (wie vorhin bei der Pyramide mit der Geraden SR geschah) und bestimme auf ihr (mittels einer Proportionaltheilung) den Punct Q_4. — Eben so verfährt man in Bezug auf die übrigen Seiten des Netzes.

Man könnte auch, wenn der Raum es gestattet, für die Ebene jeder Seite der Pyramide oder des Prisma's die H-Spur suchen und in der horizontalen Umklappung der Ebene sowohl die Ecken der Seite selbst, als auch die Ecken der Schnittfigur (soweit sie in diese Seite fällt) angeben.

§. 84.

Uebungsaufgaben.

Es schneiden sich

1) ein dreiseitiges und ein vierseitiges Prisma;
2) eine dreiseitige und eine vierseitige Pyramide;
3) ein reguläres Octaeder und ein dreiseitiges Prisma, dessen Kanten der Octaederaxe parallel laufen.

Man soll jedesmal die Schnittfigur projiciren.

Viertes Kapitel.

Darstellung krummer Linien und krummer Flächen.

A.) Von krummen Linien und ihren Projectionen.

§. 85.

Eine krumme Linie (Curve) kann nur dann Gegenstand mathematischer Betrachtungen sein, wenn sie nach einem bestimmten Gesetze gebildet ist. Von der Art dieses

Gesetzes hängt die Natur der Curve selbst ab, und die Kenntniß desselben muß immer zugleich die Mittel zur Darstellung der Curve liefern.

Liegen alle Puncte einer Curve in einer Ebene, so wird die Curve eben oder einfachgekrümmt genannt; außerdem heißt sie gewunden oder doppeltgekrümmt.

Eine Curve kehrt entweder in sich selbst zurück (wie der Kreis) und heißt dann eine geschlossene; oder sie ist nicht geschlossen, d. h. sie setzt sich ohne Ende fort und hat einen oder mehrere unendliche Zweige. Auch kann eine Curve aus mehrern getrennten Theilen bestehen, (wie z. B. in Fig. 31), und dann heißt jeder einzelne Theil ein Ast der Curve.

§. 86.

Um die Projection einer Curve zu erhalten, muß man sich alle auf ihr liegenden Puncte projicirt denken. Man kann sich vorstellen, eine Gerade, welche stets senkrecht auf der Grundebene bleibt, werde so fortgeführt, daß sie immer die gegebene Curve schneidet; dadurch wird diese Gerade in jedem Augenblicke für einen andern Curvenpunct Projectionsloth, und ihr Fußpunct beschreibt folglich die Projection der Curve. Die bewegte Gerade selbst beschreibt eine stetige krumme Fläche, welche die projicirende Fläche der Curve heißt.

Die Projection einer ebenen Curve wird in dem besondern Falle eine gerade Linie, wenn die Ebene der Curve senkrecht zur Grundebene steht (und dann ersetzt jene Ebene zugleich die projicirende Fläche); in allen andern Fällen muß die Projection wieder krummlinig sein.

Die Projection einer gewundenen Curve kann niemals eine gerade Linie werden; denn dieß würde voraussetzen, daß sämmtliche Puncte der Curve in der durch diese Gerade gehenden projicirenden Ebene lägen.

§. 87.

Durch eine Projection ist eine krumme Linie so wenig gegeben wie eine gerade; denn auf der projicirenden Fläche einer Curve lassen sich noch unendlich viele andere Curven zeichnen, welche alle die Spur (§. 5) der genannten Fläche zur Projection haben. Diese projicirende Fläche selbst aber ist durch die gegebene Curvenprojection hinreichend bestimmt. Ist daher eine Curve auf beide Grundebenen projicirt, so sind dadurch zwei projicirende Flächen bestimmt, durch deren Durchschnitt sich die Curve im Raume ergiebt. Jedoch ist dabei zu beachten, daß zwei solche Flächen sich zuweilen in mehreren Curven schneiden, also noch immer einige Zweideutigkeit über Gestalt und Lage der Curve im Raume bleiben könnte, wenn nicht ein weiterer Fingerzeig hinzukömmt. Diese Zweideutigkeit zeigt sich auch schon, wenn man die beiden gegebenen Projectionen irgend einer Curve aufmerksam betrachtet. Sind nämlich diese Projectionen so gestaltet, daß jede von einer auf dem Grundschnitte senkrechten Geraden mehrmals getroffen wird, so passen diese Projectionen für mehrere Curven zugleich, und um die Lage einer solchen Curve völlig zu bestimmen, müssen wenigstens für einen Punct die zusammengehörigen Projectionen besonders bezeichnet sein. So ist z. B. in Fig. 28, wenn sie ohne nähere Bezeichnung gegeben wäre, ungewiß, welcher von den Puncten, in denen die auf dem Grundschnitte senkrechte um die V-Projection der Curve schneidet, als V-Projection zur H-Projection u gehört. Daraus aber, daß für einen benachbarten Curvenpunct die Projectionen s und s′ durch den gleichen Buchstaben als zusammengehörig bezeichnet sind, folgt, daß zu u die näher am Grundschnitte gelegene V-Projection gehört; denn es ist überhaupt dadurch ausgesprochen, daß dem Bogen vsw nicht der Bogen v′t′w′, sondern der Bogen v′s′w′ als V-Projection entspricht.

§. 88.

Eine gewundene Curve läßt sich graphisch nur mittels ihrer Projectionen darstellen. Aus dem Entstehungsgesetze einer solchen Curve folgt aber immer auch das Gesetz, nach welchem ihre Projection auf der Grundebene entsteht.

Ebene Curven dagegen lassen sich auch unmittelbar durch Zeichnung darstellen, oder an und für sich construiren.

Um die Zeichnung einer Curve in einer Ebene auszuführen, bestimmt man durch Constructionen, welche aus ihrem Bildungsgesetze folgen, einzelne Puncte derselben (und zwar in solcher Anzahl und gegenseitiger Entfernung, daß man aus ihnen den Lauf der Curve deutlich erkennen kann), und vollendet dann die Peripherie selbst aus freier Hand, indem man durch die gefundenen Punkte eine stetige Curve zieht.

†) Zur Erläuterung einige Beispiele.

Fig. 29. 1) Es sind zwei concentrische Kreise gegeben und ein Durchmesser AB. Eine vom Mittelpunct O ausgehende Gerade schneidet die Kreise in den Puncten E, F. Aus E wird eine Senkrechte EG auf AB und durch F eine Parallele FP zu AB gezogen; beide Linien schneiden sich in P. Giebt man nun der OE immer andere Lagen (indem man sie um O gedreht denkt), so ändert auch der Punkt P fortwährend seine Lage, und beschreibt eine stetige Curve, welche eine Ellipse heißt, und deren Construction aus der Figur zu ersehen ist.

Läßt man anfangs die OE mit OA zusammenfallen, so wird EG = 0 und P fällt auf A. Eben so kann P später ins die Lage B kommen (sabald nämlich OE mit OB zusammenfällt). Kommt OE in die auf AB senkrechte Lage OE′ (oder auch OE″), so wird FP = o und P fällt in C (oder D). Daraus sieht man, daß die Ellipse durch die vier Puncte A, C, B, D geht. Die Linie AB heißt ihre große Axe, CD ihre kleine Axe. Durch die beiden Axen ist eine Ellipse völlig bestimmt. — Aus der obigen Construction der Ellipse ist leicht abzunehmen daß sie durch die Axen in vier congruente Stücke zerlegt wird.

Welche Lage auch OE haben mag, so ist immer

$$EG : PG = EO : FO = OA : OC$$

Man erhält also auch eine Ellipse, wenn man in einem Kreise einen Durchmesser zieht, auf denselben Senkrechte aus den Peripheriepuncten fällt, und diese Senkrechten alle in einem und demselben Verhältniß verkürzt. Jener Durchmesser giebt die große Axe der Ellipse, die Verkürzung des auf ihm senkrechten Durchmessers die kleine.

2) Bewegt ein Punct sich so, daß er von einem gegebenen Puncte F und einer gegebenen Geraden AB immer gleichweit entfernt bleibt, so durchläuft er eine stetige Curve, welche eine Parabel heißt. (Mit andern Worten: der geometrische Ort eines Punctes, welcher von einem gegebenen Puncte und einer gegebenen Geraden gleichweit absteht, ist eine Parabel). Fig. 30.

Fällt man $FD \perp AB$ und macht $DS = SF$, so ist S ein Punct der Parabel. Die verlängerte SF heißt ihre Axe. Legt man durch einen beliebigen Punct p der Axe eine Senkrechte PpP zu ihr und durchschneidet diese Senkrechte von F aus mit der Entfernung Dp, so sind die Schnittpuncte P und P zwei Puncte der Parabel, und auf die nämliche Art kann man beliebig viele Paare von Puncten finden. Ueber S hinaus nach der Seite von D zu kann es keine Parabelpuncte mehr geben; denn fiele p auf diese Seite, so wäre $Dp < Fp$, also würde der um F mit Dp beschriebene Kreis die PpP nicht mehr erreichen. Auf der Seite von S gegen F aber kann man den Punct p so weit hinaus verlegen, als man will, und man wird immer noch Puncte erhalten; die Parabel zeigt also auf dieser Seite zwei ins Unendliche laufende Zweige.

Da immer (wo auch p liegen möge) $pP = pP$ ist, so sind die beiden Parabelzweige diesseits und jenseits der Axe congruent.

3.) Eine Hyperbel ist der geometrische Ort eines Punctes, dessen Entfernungen von zwei gegebenen Puncten F_1, F_2 eine gegebene Differenz d haben. Fig. 31.

Trägt man auf der Linie $F_1 F_2$ von ihrem Halbirungspuncte O aus die Größe $\frac{1}{2}$ d nach beiden Seiten ab, so erhält man zwei Puncte S_1, S_2 der Hyperbel; die (begrenzte) Linie $S_1 S_2$ heißt die reelle Axe, die in O auf ihre senkrechte (unbegrenzte) $T_1 T_2$ die imaginäre Axe. Nimmt man auf der Richtung der reellen Axe einen Punct G und beschreibt mit den Halbmessern GS_1, GS_2 Kreise um die beiden Puncte F_1 und F_2, so liegen die Schnittpuncte P, P der Kreise auf der Hyperbel; denn es ist $PF_2 - PF_1 = GS_1 - GS_2 = d$. Mit denselben Halbmessern (GS_1 und GS_2) erhält man auf

dieselbe Weise sogleich noch zwei Punkte P′, 𝔓′ der Hyperbel, wenn man die Mittelpuncte F_1 und F_2 vertauscht. — Zwischen F_1 und F_2 kann G nicht angenommen werden, weil sich sonst die Kreise nicht erreichen; über diese Puncte hinaus aber kann man G in jede noch so große Entfernung verlegen. Die Hyperbel kann also keine geschlossene Curve seyn; vielmehr besteht sie aus zwei getrennten Aesten, deren jeder wieder zwei unendliche Zweige hat. — Die beiden Axen scheiden die Hyperbel in vier congruente Stücke; denn PP′ wird durch $T_1 T_2$ senkrecht halbirt, und eben so P𝔓 durch die Richtung von $S_2 S_1$.

††.) Um auch von der Darstellung einer gewundenen Curve ein Beispiel zu geben, denke man sich ein Rechteck um seine eine Seite (als um eine Axe) mit gleichförmiger Bewegung gedreht, und auf der beiderseits verlängerten Gegenseite einen Punct ebenfalls mit gleichförmiger Bewegung fortrückend; dann beschreibt dieser Punct im Raume eine gewundene Curve, welche eine Schraubenlinie genannt wird. Der Bogen, welcher von dem Puncte durchlaufen wird, bis das Rechteck eine volle Umdrehung (360°) vollendet, heißt ein Umgang, und das Stück der bewegten Geraden, welches während der nämlichen Zeit auf ihr von dem beschreibenden Punkte zurückgelegt worden ist, die Höhe des Umgangs oder kurz die Ganghöhe.

Die Schraubenlinie ist gegeben durch die Entfernung r der bewegten Geraden von der festen Dreh-Axe und durch die Ganghöhe h. Am leichtesten kann sie projicirt werden, wenn man die HE senkrecht zur Drehaxe annimmt. Die H-Projection ist dann offenbar ein
Fig. 32. Kreis vom Halbmesser r. Diesen Kreis theile man in n gleiche Theile und betrachte die Theilpuncte A, b, c, ... als H-Projectionen von einzelnen Puncten der Schraubenlinie. Soll nun A die H-Spur der Schraubenlinie vorstellen, so ist die H-Distanz dieses Punctes $=0$; die H-Distanz des Punctes B, der sich in den nächsten Theilpunct b projicirt, ist $=\frac{1}{n}h$; die H-Distanz des folgenden Punctes C ist $=\frac{2}{n}h$, u. s. f. — Dieß wird hinreichen zum Verständniß der in Fig. 32 ausgeführten Construction, wobei $oA = r$, $a'z' = h$ und $n = 12$ ist.

Ist einmal der erste Umgang projicirt, so kann man die Projectionen der nächsten Umgänge dadurch erhalten, daß man auf der Projection jeder Mantellinie von der Projection des entsprechenden Punctes aus die Ganghöhe aufträgt. So findet man z. B. den Punct c″, wenn man $c'c'' = a'z'$ macht.

§. 89.

Um zu dem allgemeinen Begriffe einer Tangente einer (ebenen oder gewundenen) Curve zu gelangen, lege man durch einen Punct A der Curve eine Gerade G, welche die Curve noch in einem zweiten Puncte B schneidet, und denke sich die Gerade so um A gedreht, daß der Schnittpunct B immer näher an A rückt. Hat man mit dieser Drehung so lange fortgefahren, bis der Punct B auf den Punct A gefallen ist, so stellt G eine Tangente der Curve dar und A ist ihr Berührungspunct.

Es ist sehr wohl möglich (und kommt auch häufig vor), daß eine Gerade eine Curve in einem Puncte berührt und zugleich in andern Puncten schneidet.

Aus obiger Erklärung einer Tangente geht hervor, daß die Tangente einer ebenen Curve ganz in der Ebene der Curve liegt.

Häufig wird verlangt, an eine in der Zeichnungsebene liegende Curve eine Tangente zu legen, und hiebei kann gegeben sein 1.) der Berührungspunct, oder 2.) ein Punct außerhalb der Curve, durch welchen die Tangente gehen soll, oder 3.) eine Gerade, mit welcher sie parallel läuft. Die Kenntniß der Eigenschaften einer Curve lehrt auch immer ein Verfahren, wie man in diesen drei Fällen die Tangente durch geometrische Constructionen finden kann. Ist aber blos die Peripherie einer Curve gegeben ohne nähere Bezeichnung ihrer Eigenschaften, so muß man durch entsprechendes Anlegen des Lineals die Richtung der Tangente mit demjenigen Grade von Genauigkeit zu erhalten suchen, welcher bei Zeichnungsoperationen überhaupt gefordert werden kann.

Die Projection der Tangente am Puncte A einer (ebenen oder gewundenen) Curve berührt die Projection der Curve in der Projection a von A. Denn dreht sich um A eine Gerade G,

welche die Curve noch in B schneidet, so lange, bis B in A fällt, so wird die Projection b von B sich der Projection a nähern und endlich in sie fallen; die Projection g der G wird also in dem Augenblicke Tangente an der Curvenprojection, in welchem G Tangente an der wahren Curve geworden ist.

§. 90.

Errichtet man auf einer Tangente einer ebenen Curve im Berührungspuncte eine Senkrechte (in der Ebene der Curve selbst), so heißt diese eine Normale der Curve.

Die Projection einer Normalen ist in der Regel keine Normale der Curven-Projection.

Eine Ebene, welche auf der Tangente einer gewundenen Curve im Berührungspunkte senkrecht ist, heißt eine Normal-Ebene dieser Curve.

Um durch einen auf einer ebenen Curve gegebenen Punct eine Normale zu dieser ziehen zu können, hat man, dem Vorigen gemäß, durch den Punct zuerst eine Tangente zu legen. Ergiebt sich aber aus der Natur der Curve ein einfaches Verfahren, die Normale unmittelbar zu construiren, so kann man umgekehrt mit ihrer Hülfe die Tangente finden; so z. B. beim Kreise, wo jeder Halbmesser eine Normale ist.

§. 91.

Eine Curve kann durch einen und denselben Punkt mehrmals hindurchgehen, und ein solcher besonderer Punct heißt dann ein mehrfacher Punct derselben. So ist p ein Doppelpunct der Curve A; q ein dreifacher Punct der Curve B. Fig. 33. I—IV.

In einem nfachen Puncte sind n Tangenten möglich, wenn die Bögen der Curve sich in demselben durchschneiden (Fig. II); aber nur eine Tangente, wenn sich die Bögen sämmtlich berühren (Fig. III); in Fig. IV. läßt der dreifache Pnnct r zwei Tangenten zu, weil in ihm

zwei Bögen sich berühren, während sie vom dritten geschnitten werden.

Die Projection eines nfachen Puncts einer Curve giebt immer wieder einen nfachen Punct der Curvenprojection (es sei denn, daß die Projectionen der Curvenbögen, die sich in jenem Puncte schneiden oder berühren, ganz aufeinander fallen). Der umgekehrte Schluß aber (von einem nfachen Puncte der Projection auf einen nfachen Punct der wahren Curve) ist nur dann erlaubt, wenn man vorher weiß, daß die Curve im Raum eben ist; denn die Projection einer gewundenen Curve kann sehr wohl einen mehrfachen Punct haben, ohne daß die wahre Curve sich selbst durchschneidet oder berührt.

§. 92.

Gewisse Aufgaben der descriptiven Geometrie führen auf die Nothwendigkeit, eine in der Zeichnungsebene gegebene (begrenzte) Curve zu rectificiren, d. h. ihre Länge in gerader Linie anzugeben. Eine solche Rectification erhält man mit hinreichender Genauigkeit, wenn man auf der Curve Bogenstücke von so geringer Länge abnimmt, daß ihre Abweichung von den zugehörigen Sehnen nicht mehr wahrnehmbar ist, und dann diese kleinen Sehnen mittels des Zirkels auf eine Gerade aufträgt (wobei natürlich vorausgesetzt werden muß, daß die Curve selbst möglichst richtig und scharf gezeichnet ist und bei der Ausführung alle Vorsicht beobachtet wird).

Läßt sich die Curve in mehrere congruente Stücke zerlegen, so braucht man nur eines dieser Stücke auf die angegebene Weise zu rectificiren. In dieser Art könnte man z. B. beim Kreise verfahren; besser aber thut man hier, eine Linie zu suchen, welche sich zum Durchmesser verhält wie 22 : 7; denn obgleich der Bruch $^{22}/_{7} = 3{,}142\ldots$ nur in den zwei ersten Decimalstellen mit der Ludolph'schen Zahl übereinstimmt, so würde man doch bei der oben be-

schriebenen Rectification (mittels kleiner Bögen) der wahren Länge der Peripherie nicht näher kommen.

Soll auf der Curve A ein Bogen gefunden werden so groß als ein gegebener Bogen der Curve B, so nimmt man wieder auf letzterer sehr kleine Bogenstücke in den Zirkel und reiht sie auf der Curve A aneinander.

§. 93.

Aufg. Die H-Projection eines Kreises zu zeichnen, dessen Mittelpunct in der HE liegt.

Aufl. Es ist klar, daß die Projection des oberhalb der Grundebene liegenden Halbkreises congruent ist der Projection des unterhalb liegenden, oder daß die Projection des ganzen Kreises durch den Durchmesser D, nach welchem die Kreisebene die HE schneidet, in congruente Hälften getheilt wird.

Fällt man nun aus verschiedenen Puncten des obern Halbkreises auf den Durchmesser D senkrechte Linien (Ordinaten) und projicirt sie, so sind ihre H-Projectionen ebenfalls auf dem Durchmesser senkrecht, und bei der Umklappung der Kreisebene wird jede Ordinate in die Richtung ihrer Projection fallen. Eine solche Ordinate im Kreise stellt (vor der Umklappung) die Hypotenuse eines rechtwinkeligen Dreiecks vor, welches zur einen Kathete die Projection der Ordinate und zur andern die H-Distanz des betreffenden Kreispunctes hat; alle diese Dreiecke aber, welche zu den verschiedenen Ordinaten gehören, sind unter sich ähnlich, weil sie alle die H-Neigung der Kreisebene enthalten, und also ist das Verhältniß der Ordinate zu ihrer Projection immer dasselbe. Demnach erhält man die Projection des Halbkreises, wenn man in seiner Umklappung die erwähnten Ordinaten sämmtlich in jenem Verhältnisse (welches durch die H-Neigung der Kreisebene gegeben ist) verkürzt, und hieraus ist zu ersehen, daß die Projection des Kreises eine Ellipse sein muß (§. 88, I, 1),

welche den Durchmesser **D** zur großen Axe hat; die kleine Axe ist die Projection desjenigen Durchmessers, welcher auf **D** senkrecht ist. Demnach kann man zur Zeichnung der verlangten Kreis-Projection die in §. 88 angegebene Ellipsenconstruction benützen.

Zus. Hat man einen Kreis zu projiciren, dessen Mittelpunct nicht in der Grund-Ebene liegt, und man führt parallel zu letzterer eine Ebene durch den Mittelpunct, so hat der Kreis auf dieser Ebene und auf der eigentlichen Grund-Ebene congruente Projectionen. Die Projection eines Kreises ist daher in allen Fällen, in denen sie nicht in eine Gerade übergeht, eine Ellipse; die große Axe ist die Projection des mit der Grundebene parallelen Durchmessers (und also diesem an Länge gleich), die kleine die Projection des Durchmessers, der auf jenem (oder auf der Spur der Kreisebene) senkrecht steht.

Ist die Kreisebene parallel zur Grund-Ebene, so giebt die Projection des Kreises wieder einen Kreis, der als eine Ellipse von gleichen Axen angesehen werden kann.

§. 94.

Uebungsaufgaben.

1) In einer gegebenen Ebene liegt ein Kreis von gegebenem Halbmesser so, daß sein Mittelpunct eine gegebene H-Projection hat. Man soll beide Projectionen des Kreises zeichnen.

2) In einer durch ihre Spuren gegebenen Ebene liegt eine Curve, von der die eine Projection gegeben ist. Man verlangt die zweite Projection und die wahre Gestalt der Curve.

3) In einer mit der HE zusammenfallenden Ebene ist eine Curve gegeben. Man verlangt die Projectionen derselben, nachdem die Ebene um eine in der HE gezogene Gerade so weit gedreht worden ist, daß sie eine gegebene H-Neigung hat.

4) Die Spuren irgend einer Curve anzugeben, deren Projectionen vollständig gezeichnet sind.

§. 95.

Aufg. Die Schnittpuncte einer gegebenen Curve A mit einer gegebenen Ebene E zu finden.

§. 98.

Fig. 34. **Aufg.** Für eine Cylinderfläche ist die Leitende (vw, v'w') und die Richtlinie (mn, m'n') gegeben. Man soll eine beliebige Mantellinie projiciren.

Aufl. Irgend eine mit mn Parallele abc, welche die H=Projection der Leitenden schneidet, kann als H=Projection einer Mantellinie gelten. Die Puncte b, c sind die H=Projectionen der Puncte B, C, in denen die Leitende von der durch abc gehenden projicirenden Ebene geschnitten wird; die zugehörigen V=Projectionen b', c' findet man durch Senkrechte zum Grundschnitt, und die mit m'n' parallel durch b' und c' gelegten Geraden sind die V=Projectionen zweier Mantellinien, denen die gemeinschaftliche H=Projection ac entspricht.

Zieht man zuerst (parallel mit m'n') beliebig die V=Projection a'b' einer Mantellinie, so ergeben sich für diese ebenfalls zwei H=Projectionen; denn zu dem in b' projicirten Puncte der Leitenden kann als H=Projection sowohl der Punct b_0 als der Punct b gehören.

Wenn (bei anderer als der in Fig. 34 angenommenen Gestalt der Leitenden) die Projection einer Mantellinie die gleichnamige Projection der Leitenden in n Puncten schneidet, so kann die zweite Projection dieser Mantellinie n verschiedene Lagen haben, d. h. eine mit der Erzeugenden parallele projicirende Ebene schneidet die Cylinderfläche nach n Mantellinien.

Zus. Wenn die H=Projectionen zweier Mantellinien die H=Projection der Leitenden **berühren** (wie in Fig. 34 die Linien rs, tu), so geben sie die Grenzen ab, innerhalb welcher die H=Projectionen aller übrigen Mantellinien liegen müssen, und bilden den **horizontalen Umriß** der Cylinderfläche. Eben so wäre der **verticale Umriß** der Fläche das mit m'n' parallele Tangentenpaar an der V=Projection der Leitenden, wenn diese Projection eine krumme Linie wäre; da sie aber in Fig. 34 eine

begrenzte Gerade ist, so gehen die Linien v′y′, w′x′ des verticalen Umrisses durch ihre Endpuncte.

Man sieht, daß, wenn die Leitende eine nichtgeschlossene Curve ist, es entweder gar keinen Umriß oder nur einen einseitigen giebt.

Die Puncte r, t, in denen der horizontale Umriß die H-Projection der Leitenden berührt, scheiden in Beziehung auf die HE den sichtbaren Theil der Leitenden vom unsichtbaren, und zwar ist hier der Theil rvt der unsichtbare, weil (wie die Lage von v′w′ zeigt) der Punct V tiefer liegt als der Punct W. Demnach sind die H-Projectionen aller jener Mantellinien, welche das Stück RVT der Leitenden schneiden, punctirt zu zeichnen. In Beziehung auf die VE ist das Stück WTV der Leitenden sichtbar, das Stück WRV unsichtbar. Die V-Projection einer Mantellinie wird daher punctirt gezeichnet, wenn der Schnitt ihrer H-Projection und der H-Projection der Leitenden auf den Bogen wrv fällt. Fig. 34.

§. 99.

Aufg. Eine Cylinderfläche ist durch die Leitende (vw, v′w′) und die Richtlinie (mn, m′n′) gegeben. Man soll die zweite Projection eines Punctes A der Fläche finden, dessen eine Projection bekannt ist. Fig. 34.

Aufl. Man zeichne die Projectionen der durch A gehenden Mantellinie (§. 98) und bestimme die verlangte zweite Projection nach §. 37.

Ist z. B. die H-Projection a gegeben, so zieht man zuerst abc || mn, sucht die zugehörigen V-Projectionen a′b′, a″c′, und gelangt so zu den Puncten a′ und a″, in deren jeden sich der Punct A auf der VE projiciren kann.

Ist die V-Projection a′ gegeben, so findet man mittels der Linie a′b′ die Linien ab, a_0b_0 (vgl. §. 98) und mit deren Hülfe die Puncte a, a_0.

Aufl. Man lasse die gegebene H=Projection der Curve A zugleich als H=Projection einer andern Curve B gelten, welche in der gegebenen Ebene liegt, und suche die V=Projection der B (§. 94, 2). Die Puncte, in denen die V=Projectionen der A und B sich schneiden, sind die V=Projectionen der gesuchten Puncte; die zugehörigen H=Projectionen ergeben sich mittels Senkrechter zum Grundschnitt.

B. Erzeugung und graphische Darstellung krummer Flächen.

§. 96.

Soll eine krumme Fläche einer mathematischen Untersuchung unterworfen werden können, so muß ihr ein bestimmtes Entstehungsgesetz zu Grunde liegen, in Folge dessen ihre Gestalt selbst Gesetzmäßigkeit und Stetigkeit zeigt. Man kann sich jede solche krumme Fläche durch Bewegung einer Linie erzeugt denken, und sie ist als gegeben zu betrachten, wenn man die erzeugende Linie kennt und das Gesetz, nach welchem diese ihre Lage (und vielleicht auch ihre Dimensionen) ändert; dieses Gesetz selbst kann in vielen Fällen durch Hülfe einer gegebenen Linie oder Fläche ausgesprochen werden.

So wenig man eine Ebene durch Projection ihrer sämmtlichen Puncte darstellen konnte, so wenig ist dieß bei einer krummen Fläche möglich; doch muß die Art der graphischen Darstellung einer Fläche immer ein Mittel gewähren, zu der einen Projection irgend eines Flächenpunctes die entsprechende zweite Projection zu finden, oder mit andern Worten: man muß im Stande sein, jeden einzelnen Punct der Fläche in Projection zu legen, also auch jede Linie, die auf der Fläche gezogen werden kann.

Da bei einer krummen Fläche in Beziehung auf das Sichtbarsein einzelner Theile derselbe Fall eintritt, wie

bei einem Polyeder, so hält man sich auch hier an die für die Darstellung eines Körpers gegebene Regel; man zeichnet nämlich solche Linien, welche auf der vom Auge abgekehrten Seite der krummen Fläche gezogen sind, punctirt (vgl. §. 68.)

Von den verschiedenen Gattungen krummer Flächen sollen hier und im Folgenden nur drei der einfachsten und zugleich wichtigsten betrachtet werdeu; nämlich Cylinderflächen, Kegelflächen und Drehungsflächen; wobei aber (wie sogleich aus den nachfolgenden Erklärungen hervorgehen wird) die beiden erstern Namen in weiterer Bedeutung gebraucht werden, als in der Elementargeometrie.

Cylinderflächen.

§. 97.

Bewegt sich eine unbegrenzte Gerade so, daß sie beständig einer gegebenen Richtung parallel bleibt und sich in allen ihren Lagen an eine gegebene (ebene oder gewundene) Curve lehnt, so beschreibt sie eine Cylinderfläche im allgemeinsten Sinne des Worts. Eine Cylinderfläche ist also der geometrische Ort einer Geraden, welche eine gegebene Curve schneidet und dabei eine gegebene Richtung hat. Doch ist dabei vorausgesetzt, daß, falls die Curve eben ist, ihre Ebene jener gegebenen Richtung nicht parallel sei, indem sonst statt der Cylinderfläche eine Ebene erzeugt werden würde. Die Curve heißt die Leitlinie oder Leitende (Directrix), die bewegliche Gerade die Erzeugende (Generatrix), jede einzelne Lage derselben eine Mantellinie. Die Gerade, mit welcher die Erzeugende parallel bleibt, wird Richtlinie genannt.

Eine Cylinderfläche ist gegeben, wenn man die Projectionen der Leitenden und der Richtlinie kennt.

§. 98.

Fig. 34. **Aufg.** Für eine Cylinderfläche ist die Leitende (vw, v′w′) und die Richtlinie (mn, m′n′) gegeben. Man soll eine beliebige Mantellinie projiciren.

Aufl. Irgend eine mit mn Parallele abc, welche die H=Projection der Leitenden schneidet, kann als H=Projection einer Mantellinie gelten. Die Puncte b, c sind die H=Projectionen der Puncte B, C, in denen die Leitende von der durch abc gehenden projicirenden Ebene geschnitten wird; die zugehörigen V=Projectionen b′, c′ findet man durch Senkrechte zum Grundschnitt, und die mit m′n′ parallel durch b′ und c′ gelegten Geraden sind die V=Projectionen zweier Mantellinien, denen die gemeinschaftliche H=Projection ac entspricht.

Zieht man zuerst (parallel mit m′n′) beliebig die V=Projection a′b′ einer Mantellinie, so ergeben sich für diese ebenfalls zwei H=Projectionen; denn zu dem in b′ projicirten Puncte der Leitenden kann als H=Projection sowohl der Punct b_0 als der Punct b gehören.

Wenn (bei anderer als der in Fig. 34 angenommenen Gestalt der Leitenden) die Projection einer Mantellinie die gleichnamige Projection der Leitenden in n Puncten schneidet, so kann die zweite Projection dieser Mantellinie n verschiedene Lagen haben, d. h. eine mit der Erzeugenden parallele projicirende Ebene schneidet die Cylinderfläche nach n Mantellinien.

Zus. Wenn die H=Projectionen zweier Mantellinien die H=Projection der Leitenden **berühren** (wie in Fig. 34 die Linien rs, tu), so geben sie die Grenzen ab, innerhalb welcher die H=Projectionen aller übrigen Mantellinien liegen müssen, und bilden den **horizontalen Umriß** der Cylinderfläche. Eben so wäre der **verticale Umriß** der Fläche das mit m′n′ parallele Tangentenpaar an der V=Projection der Leitenden, wenn diese Projection eine krumme Linie wäre; da sie aber in Fig. 34 eine

begrenzte Gerade ist, so gehen die Linien v'y', w'x' des verticalen Umrisses durch ihre Endpuncte.

Man sieht, daß, wenn die Leitende eine nichtgeschlossene Curve ist, es entweder gar keinen Umriß oder nur einen einseitigen giebt.

Die Puncte r, t, in denen der horizontale Umriß die H-Projection der Leitenden berührt, scheiden in Beziehung auf die HE den sichtbaren Theil der Leitenden vom unsichtbaren, und zwar ist hier der Theil rvt der unsichtbare, weil (wie die Lage von v'w' zeigt) der Punct V tiefer liegt als der Punct W. Demnach sind die H-Projectionen aller jener Mantellinien, welche das Stück RVT der Leitenden schneiden, punctirt zu zeichnen. In Beziehung auf die VE ist das Stück WTV der Leitenden sichtbar, das Stück WRV unsichtbar. Die V-Projection einer Mantellinie wird daher punctirt gezeichnet, wenn der Schnitt ihrer H-Projection und der H-Projection der Leitenden auf den Bogen wrv fällt. Fig. 34.

§. 99.

Aufg. Eine Cylinderfläche ist durch die Leitende (vw, v'w') und die Richtlinie (mn, m'n') gegeben. Man soll die zweite Projection eines Punctes A der Fläche finden, dessen eine Projection bekannt ist. Fig. 34.

Aufl. Man zeichne die Projectionen der durch A gehenden Mantellinie (§. 98) und bestimme die verlangte zweite Projection nach §. 37.

Ist z. B. die H-Projection a gegeben, so zieht man zuerst abc || mn, sucht die zugehörigen V-Projectionen a'b', a''c', und gelangt so zu den Puncten a' und a'', in deren jeden sich der Punct A auf der VE projiciren kann.

Ist die V-Projection a' gegeben, so findet man mittels der Linie a'b' die Linien ab, a_0b_0 (vgl. §. 98) und mit deren Hülfe die Puncte a, a_0.

Trifft die durch a (oder a′) gelegte Projection der Mantellinie die gleichnamige Projection der Leitenden in n Puncten, so läßt die Aufgabe n Lösungen zu. Gar keine Lösung giebt es, wenn die gegebene Projection des Punctes außerhalb des gleichnamigen Umrisses liegt; eine, wenn sie auf den Umriß fällt.

§. 100.

Aufg. Die Spuren einer Cylinderfläche zu zeichnen, wenn die Leitende und die Richtlinie gegeben sind.

Fig. 34. **Aufl.** Man projicire eine hinreichende Anzahl Mantellinien (§. 98), bestimme für jede einzelne beide Spuren (§. 30) und lege immer durch die gleichnamigen Spuren eine stetige Curve.

Kegelflächen.

§. 101.

Eine Kegelfläche ist der geometrische Ort einer Geraden, welche durch einen gegebenen Punct geht und eine gegebene Curve schneidet; doch darf diese Curve, falls sie eben ist, in ihrer Ebene nicht zugleich den gegebenen Punct enthalten. Der feste Punct heißt der Mittelpunct oder die Spitze der Kegelfläche, die gegebene Curve die Leitende, die veränderliche Gerade die Erzeugende und jede ihrer einzelnen Lagen eine Mantellinie.

Jede vollständige Kegelfläche besteht aus zwei Mänteln, welche in der Spitze zusammenhängen.

Eine Kegelfläche ist gegeben durch die Projectionen ihrer Leitenden und ihrer Spitze.

§. 102.

Aufg. Eine beliebige Mantellinie einer Kegelfläche zu projiciren, wenn deren Spitze (m, m′) und Leitende (vw, v′w′) gegeben sind.

Aufl. Lege durch m eine beliebige Gerade, welche die vw in b, c schneidet, bestimme die zu b, c gehörigen V=Projectionen b′,c′ und ziehe m′b′, m′c′, so sind (mb,m′b′), (mc, m′c′) zwei Mantellinien. Fig. 35.

Würde die vw (bei anderer Gestalt) von der mbc nicht gerade in zwei, sondern in n Puncten geschnitten, so würde die durch mcb geführte projicirende Ebene mit der Kegelfläche n Mantellinien gemein haben.

Zus. Auch hier bilden die äußersten Lagen der projicirten Erzeugenden die Umrisse der Fläche. Diese äußersten Lagen sind nämlich je zwei Gerade, welche von der Projection der Spitze auslaufen und die gleichnamige Projection der Leitenden berühren, wenn die Projection eine Curve ist — oder durch ihre Endpuncte gehen, wenn sie eine Gerade ist.

Was in §. 98 (Zus.) für die Cylinderfläche in Betreff des Sichtbarseins einzelner Theile gesagt ist, gilt auch hier. Doch ist hiezu noch zu bemerken, daß jede Mantellinie, welche unterhalb der Spitze M unsichtbar war, oberhalb derselben sichtbar wird, und umgekehrt. Nur die Umrisse sind ihrer ganzen Länge nach voll auszuziehen.

§. 103.

Aufg. Zu der einen Projection (a oder a′) eines auf einer gegebenen Kegelfläche liegenden Punctes die zweite Projection zu finden.

Aufl. ganz ähnlich, wie in §. 99. Fig. 35.

§. 104.

Aufg. Die Spuren einer gegebenen Kegelfläche zu zeichnen.

Aufl. wie in §. 100. Fig. 35.

Zus. I. Die Spur einer Kegelfläche kann eine nichtgeschlossene Curve sein, wenn gleich die Leitende eine geschlossene Curve ist. Legt man nämlich durch die Spitze

M der Kegelfläche eine Ebene E parallel zur Grundebene, und es fällt ein Punct U der Leitenden in diese Ebene, so ist die durch ihn gehende Matellinie MU der Grundebene parallel und hat keine wirkliche Spur; indem aber die Spur einer Mantellinie, welche in der Nähe der MU liegt, in sehr große Entfernung von m fällt, und zwar in immer größere, je näher die Mantellinie an MU kommt, so sagt man, die Spur der MU liege in unendlicher Entfernung. Die bewegliche Erzeugende des Kegels kann sich der MU von zwei entgegengesetzten Seiten nähern; daher wird die Spur der Kegelfläche zwei in's Unendliche fortlaufende Zweige haben.

Schneidet jene durch M gehende und zur Grundebene parallele Ebene E die Leitende in zwei Puncten U_1, U_2, so fallen die Spuren der beiden Mantellinien MU_1, MU_2 in unendliche Entfernung von m; so lange die Erzeugende des Kegels denjenigen Bogen der Leitenden durchläuft, welcher oberhalb der Ebene E liegt, beschreibt ihre Spur einen Curvenast mit zwei unendlichen Zweigen; während die Erzeugende sich durch den Bogen unterhalb E fortbewegt, beschreibt ihre Spur einen zweiten Curvenast, der ebenfalls zwei unendliche Zweige hat.

Auf ähnliche Weise überzeugt man sich, daß allgemein, wenn die geschlossene Leitende von der Ebene E in n Puncten geschnitten wird, die Spur der Kegelfläche n unendliche Aeste hat.

Zus. II. Die Spur einer Kegelfläche kann eine geschlossene Curve sein, wenn gleich die Leitende nicht geschlossen ist. Um dieß einzusehen, stelle man sich einen Fall vor, wo die Kegelfläche eine ebene geschlossene Leitende und eine nichtgeschlossene Spur hat, vertausche dann das Grundsystem mit einem andern, dessen eine Grundebene durch die Leitende geht, und betrachte die Curve, welche vorhin als Spur erschien, als neue Leitende; dadurch ist offenbar die erste Leitende zur Spur geworden,

und man hat eine Kegelfläche mit nichtgeschlossener Leitenden aber geschlossener Spur vor sich.

Hieraus ist zu ersehen, daß eine Kegelfläche auch in solchen Fällen in sich selbst zurückkehren kann, wo die Leitende eine nicht geschlossene Curve ist.

Drehungsflächen.

§. 105.

Denkt man eine gerade oder krumme Linie L auf irgend eine Weise in fester Verbindung mit einer Geraden A, und dreht dieses System zweier Linien um die Gerade A, so beschreibt L eine krumme Fläche, welche den Namen Drehungsfläche (Revolutionsfläche, Rotationsfläche) erhält. Die Gerade A heißt die Drehungsaxe, die Linie L die Erzeugende der Fläche. Der Schnitt, den eine durch die Drehungsaxe geführte Ebene auf der Fläche hervorbringt, wird ein Meridian der Fläche genannt.

Als Drehungsfläche läßt sich die krumme Oberfläche des geraden Kegels und geraden Cylinders der Elementargeometrie betrachten; denn erstere entsteht durch Drehung eines Winkels um einen seiner Schenkel, letztere durch Drehung eines Rechtecks um die eine Seite (wobei die gegenüberliegende ohne Ende verlängert zu denken ist). So auch die Kugelfläche, welche durch Drehung eines Halbkreises um seinen Durchmesser erzeugt wird.

Um noch mehr Beispiele solcher Flächen vor Augen zu haben, drehe man einen Kreis um eine seiner Sehnen; oder um seine Tangente; oder um eine Gerade, welche in seiner Ebene liegt, ohne ihn zu treffen; oder um eine Gerade außerhalb seiner Ebene.

Die Kugel (als Drehungsfläche betrachtet) bietet noch die besondere Eigenthümlichkeit, daß sie unendlich viele Drehungsaxen besitzt, indem man jede durch den Mittelpunct gehende Gerade als Axe nehmen kann.

§. 106.

Eine zuerst in die Augen springende Eigenschaft der Drehungsflächen ist die, daß jeder Punct der Erzeugenden während der Drehung einen **Kreis** beschreibt, dessen Mittelpunct auf der Drehungsaxe liegt und dessen Halbmesser der Abstand des Punctes von der Drehungsaxe ist. Die Ebene dieses Kreises ist senkrecht auf der Drehungsaxe, woraus umgekehrt folgt, daß jede zur Drehungsaxe senkrechte Ebene die Drehungsfläche nach einem Kreise schneidet (oder auch nach mehreren concentrischen Kreisen). Jeder solche Kreis heißt ein **Parallelkreis**.

Ist die krumme Fläche von der Beschaffenheit, daß sie durch die Ebene eines Parallelkreises in zwei congruente Hälften geschieden werdeu kann, so erhält dieser Parallelkreis den Namen **Aequator**. **Alle Meridiane** einer Drehungsfläche sind unter sich **congruent**.

§. 107.

Für die graphische Darstellung einer Drehungsfläche ist es am zweckmäßigsten, die HE senkrecht zur Drehungsaxe zu legen, so daß die H=Spur der letztern zugleich ihre H=Projection ist. Daraus fließen folgende Vortheile: 1.) jeder Parallelkreis hat zur H=Projection einen **Kreis**, dessen Mittelpunct in die Spur der Drehungsaxe fällt und dessen Halbmesser dem Halbmesser des wahren Parallelkreises gleich ist; 2.) die V=Projection jedes Parallelkreises ist eine zum Grundschnitt parallele **Gerade**, welche an Länge dem Durchmesser des Parallelkreises gleichkommt und von der V=Projection der Drehungsaxe senkrecht halbirt wird; 3.) die H=Projection jedes Meridians giebt eine **Gerade**, welche durch die H=Spur der Drehungsaxe geht. In den nachfolgenden Beispielen wird diese Wahl des Grundsystems immer beobachtet werden.

Derjenige Meridian, welcher parallel zur VE ist und sich also auf letzterer unverändert projicirt, heißt der **Haupt**=

meridian, und seine V=Projection ist zugleich der verticale Umriß der Fläche. Den horizontalen Umriß erhält man als Projection des größten Parallelkreises. Erstreckt sich die Drehungsfläche in's Unendliche, so kann es keinen größten Parallelkreis, also auch keinen horizontalen Umriß geben.

§. 108.

Aufg. Eine Drehungsfläche hat (o, o′o″) zur Axe und (vuw, v′u′w′) zur Erzeugenden. Man soll für einen Punct der Fläche, dessen eine Projection gegeben ist, den Parallelkreis projiciren. Fig. 36. 37.

Aufl. Ist die H=Projection a des Punctes gegeben, so findet man zuerst die H=Projection des Parallelkreises als einen mit oa um o beschriebenen Kreis. Dieser schneidet die vuw in einem Puncte b, zu welchem man als V=Projection den Punct b′ erhält. Die V=Projection des Parallelkreises fällt in die durch b′ gehende Parallele mit dem Grundschnitt.

Ist die V=Projection a′ gegeben, so zieht man durch sie eine Parallele zum Grundschnitt, sucht die zu b′ gehörige H=Projection b, beschreibt mit ob einen Kreis um o und bestimmt die Grenzen für die V=Projection des Parallelkreises mittels der Größe ob.

Zus. Sind im erstern Falle zu b mehrere V=Projectionen möglich, so giebt es mehrere Parallelkreise, welche einerlei H=Projection haben.

Können im zweiten Falle zu b′ mehrere H=Projectionen gehören, so schneidet eine zur Drehungsaxe senkrechte Ebene die Drehungsfläche in mehreren concentrischen Parallelkreisen.

§. 109.

Aufg. Zu der einen Projection eines auf einer gegebenen Drehungsfläche liegenden Punctes die zweite Projection zu finden.

Aufl. Projicire den durch den Punct gehenden Parallelkreis (§. 108) und bestimme die zweite Projection mittels einer Senkrechten zum Grundschnitt.

Zus. Aus §. 108, Zus. folgt, daß man zur gegebenen Projection zuweilen mehrere zweite Projectionen finden kann, oder daß mehrere Puncte der Fläche eine gemeinschaftliche Projection haben können.

§. 110.

Aufg. Den Meridian einer gegebenen Drehungsfläche zu projiciren, welcher durch einen gegebenen Punct derselben geht.

Fig. 37. **Aufl.** Ist (o, o′o″) die Drehungsaxe, (vuw, v′u′w′) die Erzeugende, c die H=Projection des Punctes, für welchen der Meridian gesucht werden soll, so ist die Gerade oc die H=Projection des letztern. Sucht man für verschiedene Puncte in dieser Geraden die zugehörigen V=Projectionen (§. 109) und verbindet sie stetig, so hat man auch die V=Projection des Meridians.

§. 111.

Aufg. Den verticalen Umriß einer Drehungsfläche zu zeichnen, deren Axe und Erzeugende gegeben sind.

Aufl. Diese Aufgabe ist nur ein besonderer Fall der vorigen, indem der verticale Umriß die V=Projection des Hauptmeridians ist; die H=Projection des Hauptmeridians ist aber parallel zum Grundschnitt. (S. Fig. 37.)

Fünftes Kapitel.

Berührung krummer Flächen durch gerade Linien und Ebenen.

§. 112.

Eine Gerade berührt eine krumme Fläche, wenn sie eine auf der Fläche gezogene Curve berührt.

Die Aufgabe, durch einen gegebenen Punct A einer Fläche eine Tangente an sie zu legen, ist eine unbestimmte, da durch jenen Punct unendlich viele Curven auf der Fläche gezogen werden können.

Der geometrische Ort einer Geraden, welche eine krumme Fläche in einem gegebenen Puncte A berührt, ist im Allgemeinen eine **Ebene**. Denn würden die sämmtlichen durch A gehenden Tangenten nicht in einer Ebene liegen, so müßten sie eine Kegelfläche bilden, welche A zur Spitze hätte; jede Kegelfläche aber muß von einer durch ihre Spitze gelegten Ebene nach mehreren Geraden geschnitten werden können; daher müßte eine Curve C, nach welcher eine durch A gehende Ebene die gegebene krumme Fläche schneidet, im Puncte A mehrere Tangenten zulassen, was im Allgemeinen nicht der Fall ist und nur dann möglich wäre, wenn der Punct A einen mehrfachen Punct der Curve C abgäbe vgl. §. 91. Man sieht hieraus, daß für jeden gewöhnlichen Punct einer krummen Fläche die durch ihn gehenden Tangenten eine Ebene bestimmen, und diese nennt man eine **Berührungsebene**.

Allerdings aber kann statt der Berührungsebene ein Berührungskegel auftreten, wenn der Berührungspunct ein besonderer Punct der Fläche ist, nämlich ein solcher, welcher für jede durch ihn gehende und auf der krummen Fläche liegende ebene Curve einen mehrfachen Punct vorstellt. In einem solchen Falle bildet

die Fläche in dem erwähnten Puncte eine trichterförmige Einsenkung. (Ein Beispiel liefert die Fläche, welche durch Drehung eines Kreises um eine Sehne entsteht.)

†) Der obigen Erklärung von einer Berührungsebene entspricht als Umkehrung der Lehrsatz: **Wird eine krumme Fläche F von einer Ebene E im Puncte A berührt, und irgend eine andere durch A gelegte Ebene schneidet die F in der Curve f, die E in der Geraden e, so ist e eine Tangente der f und A ihr Berührungspunct.**

§. 113.

Eine **Normale** einer krummen Fläche ist eine Gerade, welche auf einer Berührungsebene im Berührungspuncte senkrecht steht.

Zwei krumme Flächen berühren sich, wenn sie einen gemeinschaftlichen Punct und für diesen die Berührungsebene oder die Normale gemein haben.

§. 114.

Soll an eine gegebene krumme Fläche eine Berührungsebene durch einen auf der Fläche gegebenen Punct gelegt werden, so folgt aus §. 112, daß die gesuchte Berührungsebene bestimmt ist, wenn man irgend zwei durch den gegebenen Berührungspunct gehende Tangenten der krummen Fläche kennt. Man wird sich daher immer zuerst zwei Curven zu verschaffen suchen, welche auf der krummen Fläche durch den gegebenen Punct gehen, an diese Curven Tangenten ziehen und dann durch beide Tangenten eine Ebene legen. Kann man aber durch den gegebenen Berührungspunct eine gerade Linie ziehen, so ist diese als ihre eigene Tangente zu betrachten und muß jedenfalls in der gesuchten Berührungsebene liegen, so daß man dann nur noch eine Curve auf der Fläche nöthig hat.

§. 115.

Durch jeden Punct A einer Drehungsfläche geht ein Parallelkreis und ein Meridian, und diese beiden Curven bieten sich am natürlichsten als Hülfscurven für die Construction der Berührungsebene in A dar.

α) Die Berührungsebene einer Drehungsfläche steht senkrecht auf der durch den Berührungspunct gehenden Meridianebene. Denn wenn man durch den Berührungspunct A den Parallelkreis zieht und an diesen durch A eine Tangente T legt, so steht T senkrecht auf der durch A gehenden Meridianebene M *); und da die Berührungsebene durch T gehen muß, so steht auch diese senkrecht auf M (§. 2, XI).

β.) Alle Berührungsebenen einer Drehungsfläche für die Puncte eines und desselben Parallelkreises schneiden die Drehungsaxe in demselben Puncte. Denn denkt man sich an einen Meridian eine Tangente gezogen, welche die Drehungsaxe im Puncte X schneidet, so wird bei der Drehung des Meridians der Berührungspunct einen Parallelkreis beschreiben, aber die verschiedenen Lagen, in welche die Tangente nach und nach kommt, müssen alle durch den unbeweglichen Punct X gehen; werden nun durch verschiedene Puncte jenes Parallelkreises Berührungsebenen an die Drehungsfläche gelegt, so gehen diese durch die verschiedenen Lagen der Meridiantangente, also immer durch den Punct X.

γ) Jede Normale einer Drehungsfläche schneidet die Drehungsaxe. Denn da die Berüh-

---

*) Um dieß zu beweisen, denke man sich einen Durchmesser des Parallelkreises parallel mit T gezogen; dieser steht senkrecht auf der Drehungsaxe und zugleich senkrecht auf dem Durchmesser, nach welchem die Ebene des Parallelkreises von der Meridianebene M geschnitten wird, also senkrecht auf M selbst (§. 2, VII); mithin ist auch T $\perp$ M (§. 2, XV).

rungsebene senkrecht auf der Meridianebene des Berührungspunctes ist, so muß die Normale ganz in diese Meridianebene fallen, folglich der Drehungsaxe begegnen. (Doch kann in gewissen Fällen dieser Begegnungspunct unendlich entfernt oder die Normale der Drehungsaxe parallel sein.) Zugleich sieht man hieraus, daß eine Normale irgend eines Meridians zugleich eine Normale der Drehungsfläche ist.

δ) Alle Normalen einer Drehungsfläche, welche ihre Fußpuncte in dem nämlichen Parallelkreise haben, schneiden die Drehungsaxe in dem nämlichen Puncte. Trifft nämlich irgend eine Normale die Drehungsaxe im Puncte Y, so wird dieselbe bei Drehung der Meridianebene, in welcher sie liegt, in immer andere Lagen kommen, jedoch stets Normale des Meridians, und mithin auch der Fläche selbst, bleiben; ihr Fußpunct wird dabei einen Parallelkreis durchlaufen, aber der Punct Y kann seine Stelle nicht ändern.

§. 116.

Aufg. Die Berührungsebene einer durch die (verticalstehende) Drehungsaxe (o, o′o″) und den Hauptmeridian (vw, v′u′w′) gegebenen Drehungsfläche zu finden, wenn man die H-Projection a des Berührungspunctes kennt.

Fig. 36. **Aufl. I.** Die H-Projection des durch A gehenden Meridians ist oa. Dreht man diesen Meridian bis er auf den Hauptmeridian fällt, so kommt a in die Lage b (so daß ob=oa) und die zugehörige V-Projection ist b′. Durch b′ ziehe man eine Tangente b′o″ an die Curve v′u′w′; dann ist (ob, o″b′) die durch (b, b′) gehende Tangente des Hauptmeridians und S ihre H-Spur. Bei der Zurückbewegung des Meridians in seine ursprüngliche Lage beschreibt diese Tangente eine Kegelfläche, deren Spitze

(o,o'') in der Drehungsaxe liegt; die H=Spur S kommt nach P zu liegen (oP=oS) und die H=Spur der gesuchten Berührungsebene muß durch P gehen. Die Projectionen der Geraden, welche in A den betreffenden Parallelkreis berührt, sind offenbar ar (⊥ oa) und a'b'R' (|| GS), und durch die V=Spur R' dieser Berührungslinie geht die V=Spur der gesuchten Berührungsebene. Die H=Spur der Ebene ist aber parallel mit ar (§. 32, Zus.); zieht man daher PQ || ar und verbindet Q mit R', so ist PQR' die Berührungsebene im Puncte A.

Aufl. II. Man bestimme die Linie o''b',b'R', ar wie vorhin. Sucht man die zu a gehörige V=Projection a' (§. 109) und zieht o''a', so berührt (oa, o''a') den durch A gehenden Meridian in A (vgl. Bew. zu §. 115, β). Eine Ebene, durch (oa, o''a') und (ar, a'R') gelegt (§. 41.), ist die gesuchte Berührungsebene.

Aufl. III. Ist b'o'' wie in Aufl. I gefunden, so kann man auch die V=Projection b'c' (⊥ b'o'') für die durch (b, b') gehende Normale der Drehungsfläche zeichnen. Verbindet man (nachdem a' bestimmt ist) c' mit a', so ist (oa, c'a') die Normale des Punctes A (§. 115, δ). Nun bestimme man den Punct R' wie in Aufl. I, ziehe R'Q ⊥ c'a' und dann QP ⊥ oa, so ist PQR' die verlangte Berührungsebene (§. 24).

Die Vergleichung dieser drei Auflösungen leitet für jede einzelne auf verschiedene Genauigkeitsproben.

Zus. Die Aufgabe läßt sich noch einfacher lösen, wenn die gegebene Fläche eine Kugel ist, bei welcher bekanntlich jeder Radius zugleich eine Normale vorstellt.

§. 117.

Da die Berührungsebene für einen gegebenen Punct einer Cylinder= oder Kegelfläche durch die Mantellinie geht, auf welcher der Berührungspunct liegt (§. 114), so hat man zu ihrer Bestimmung nur noch eine Curve

auf der Fläche anzunehmen. Diese Curve braucht aber nicht einmal durch den Berührungspunct selbst zu gehen, wenn sie nur jene Mantellinie schneidet; eine Tangente derselben, durch ihren Schnitt mit der Mantellinie gezogen, muß jedenfalls in die fragliche Berührungsebene fallen, indem es für alle möglichen Puncte einer und derselben Mantellinie nur eine und dieselbe Berührungsebene giebt.

Um diesen letztern Satz zu beweisen, wähle man auf der Mantellinie M, welche durch den gegebenen Berührungspunct A geht, einen zweiten Punct A′ beliebig. Auf der krummen Fläche sei durch A die Curve C, durch A′ die Curve C′ gezogen. Eine beliebig durch M gelegte Ebene E schneidet die krumme Fläche immer in einer zweiten Mantellinie N, welche den Curven C und C′ in den Puncten B und B′ begegnen mag. Die in der Ebene E liegenden Sehnen AB und A′B′ denke man sich verlängert, und drehe nun die Ebene E so um M, daß B sich dem Puncte A nähert, bis endlich beide Puncte zusammenfallen, mithin AB zur Tangente der Curve C in A (§. 89) und E zur Berührungsebene wird. Im Augenblick jenes Zusammenfallens hat sich aber die Mantellinie N ganz mit der M vereinigt; es ist also auch A′B′ zur Tangente der Curve C′ in A′ geworden, oder die vorhin gefundene Lage der Ebene E berührt die krumme Fläche zugleich auch in A′. Da nun A′ jeden beliebigen Punct der M vorstellen kann, so sieht man, daß die Ebene E die krumme Fläche nach der ganzen Länge dieser Mantellinie M berührt.

†.) Der allgemeine Satz in §. 112, † läßt sich bezüglich der eben betrachteten Flächen in folgender Form aussprechen: Wird eine Cylinder- oder Kegelfläche F von einer Ebene E nach der Mantellinie M berührt, und es schneidet irgend eine andere Ebene die F in der Curve f, die E in der

Geraden e, die M im Puncte m, so berührt e die Curve f in m.

§. 118.

Aufg. An eine Cylinderfläche, welche (vw, v′w′) als Leitende und (mn, m′n′) als Richtlinie hat, soll eine Berührungsebene durch den in a H-projicirten Flächenpunct gelegt werden. Fig. 34.

Aufl. Da die H-Projection a mehreren Flächenpuncten entsprechen kann (§. 99), so würde man mehrere Auflösungen erhalten. Es soll aber von diesen Puncten hier nur derjenige berücksichtigt werden, welcher die kleinste H-Distanz hat.

Man projicire (nach §. 98) die durch A gehende Mantellinie (ab, a′b′) und ziehe durch den Punct (b, b′), wo sie die Leitende schneidet, eine Tangente (bP, b′p′) an letztere. Die durch (ab, a′b′) und (bP, b′p′) gelegte Ebene PQR′ ist die gesuchte Berührungsebene.

§. 119.

Aufg. Durch einen auf einer Kegelfläche gegebenen Punct (a, a″) eine Berührungsebene an diese zu legen.

Aufl. ganz ähnlich wie in §. 118. (S. Fig. 35).

§. 120.

Aufg. An eine Cylinderfläche, für welche man Leitende und Erzeugende kennt, eine Berührungsebene durch einen außerhalb gegebenen Punct P zu legen.

Aufl. Eine Gerade H, durch P parallel zur Erzeugenden gelegt, fällt ganz in die gesuchte Ebene, indem letztere eine Mantellinie enthalten muß. (§. 2, VI). Die Spuren der Ebene gehen daher durch die Spuren der H

und berühren die gleichnamigen Cylinderspuren (§. 117, †); man kann sie also leicht erhalten, wenn man eine der Cylinderspuren construirt.

Kann man aus der Spur der H an die gleichnamige Cylinderspur mehr als eine Tangente ziehen, so ist die gesuchte Berührungsebene mehrerer Lagen fähig.

Ist die Leitende eben, so kann man auch aus dem Puncte, wo ihre Ebene von der H geschnitten wird, eine Tangente T an sie ziehen und durch T und H eine Ebene führen; dadurch wird die Cylinderspur entbehrlich.

§. 121.

Aufg. An eine Kegelfläche, deren Leitende und Spitze gegeben sind, eine Berührungsebene durch einen außerhalb angenommenen Punct P zu legen.

Aufl. Verbinde P mit der Kegelspitze durch eine Gerade H und lege durch diese eine Ebene, deren eine Spur die gleichnamige Kegelspur berührt.

Man sieht, daß der Aufgabe durch mehrere Ebenen Genüge geleistet werden kann, sobald aus der Spur der H mehrere Tangenten an die gleichnamige Kegelspur möglich sind.

Die Construction der Kegelspur kann wegbleiben, wenn die Fläche eine ebene Leitende hat; denn eine Tangente T, an die Leitende aus demjenigen Puncte gezogen, in welchem die Ebene der letztern von der H getroffen wird, liegt ganz in der verlangten Berührungsebene (§. 117, †).

§. 122.

Aufg. An eine durch Leitende und Spitze gegebene Kegelfläche eine Berührungsebene parallel mit einer gegebenen Geraden G zu legen.

Aufl. Da die Berührungsebene durch die Kegelspitze gehen und zugleich parallel mit G sein muß, so wird

eine durch die Kegelspitze parallel mit G gelegte Linie H ganz in diese Ebene fallen. Eine Spur derselben findet man also, wenn man eine der Kegelspuren zeichnet und an diese eine Tangente aus der gleichnamigen Spur der H zieht (vgl. §. 117, †); ihre zweite Spur ergiebt sich durch die zweite Spur der H.

Lassen sich n Tangenten an die Kegelspur aus der entsprechenden Spur der H ziehen, so giebt es n Ebenen, welche der Aufgabe genügen.

Ist die Leitende der Kegelfläche eine ebene Curve, so kann man auch, um der Construction der Kegelspur auszuweichen, so verfahren, wie in der vorigen Aufgabe für einen ähnlichen Fall gelehrt wurde.

§. 123.

Aufg. An eine durch Leitende und Erzeugende gegebene Cylinderfläche eine Berührungsebene parallel mit einer gegebenen Geraden G zu legen.

Aufl. Da die gesuchte Ebene eine Mantellinie des Cylinders enthält, so muß eine Ebene E, welche man parallel zur Erzeugenden durch G legt, parallel mit jener Ebene sein. Ferner müssen die Spuren der gesuchten Ebene die gleichnamigen Spuren der Cylinderfläche berühren (§. 117, †). Man hat demnach die Spuren der Ebene E zu bestimmen (§. 43), eine Spur der Cylinderfläche zu zeichnen (§. 100) und an diese eine Tangente parallel mit der gleichnamigen Spur der E zu ziehen; diese Tangente ist dann die eine Spur der gesuchten Ebene; die zweite ist leicht hinzuzufügen, da sie der zweiten Spur von E parallel ist.

Die Berührungsebene ist mehrerer Lagen fähig, wenn man an die Cylinderspur mehrere Tangenten parallel mit der betreffenden Spur der E ziehen kann.

Die Construction der Cylinderspur läßt sich umgehen, wenn die Leitende eine ebene Curve ist. Projicirt am

nämlich die Linie, in welcher die Ebene der Leitenden von der Ebene E geschnitten wird, legt parallel zu dieser Schnittlinie eine Tangente T an die Leitende, und zeichnet die durch den Berührungspunct der T gehende Mantellinie M des Cylinders, so ist eine durch T und M geführte Ebene die verlangte Berührungsebene.

§. 124.

Sollte an eine Drehungsfläche eine Berührungsebene durch einen außerhalb gegebenen Punct oder parallel mit einer gegebenen Geraden gelegt werden, so hätte man in beiden Fällen eine unbestimmte Aufgabe vor sich, indem es immer unendlich viele Berührungsebenen der verlangten Art giebt.

Nur der Drehungs-Kegel und Drehungs-Cylinder machen (dem Frühern zufolge) eine Ausnahme.

§. 125.

Aufg. An eine gegebene Kugel eine Berührungsebene durch eine gegebene Gerade GH′ zu legen.

Beide Grundebenen seien durch den Mittelpunct O der Kugel gelegt, so daß in der Zeichnungsebene die beiden Umrisse sich decken.

Aufl. Man sieht im Voraus, daß man zwei solche Berührungsebenen finden wird.

Fig. 38. Eine Ebene, welche durch die nach den gesuchten Berührungspuncten laufenden Halbmesser gelegt wird, steht senkrecht auf beiden Berührungsebenen (§. 2, XI), mithin auch auf der gegebenen Geraden (§. 2, XII); man erhält also ihre Spuren OX, OY′, wenn man aus O Senkrechte auf die Projectionen der GH′ fällt. Diese Ebene schneidet die Kugel nach einem größten Kreise, die GH′ in einem Puncte P, und die gesuchten Ebenen in zwei von P ausgehenden Tangenten des größten Kreises, deren

Berührungspuncte zugleich die Berührungspuncte zwischen jenen Ebenen und der Kugel sind (§. 112, †). Die Projectionen des Punctes P findet man nach §. 40, seine Umklappung $P_{,,}$ mit der Ebene XOY′ nach §. 50; die Umklappung des in derselben Ebene liegenden größten Kreises fällt in den gegebenen Kugelumriß; man findet daher die umgeklappten Lagen $R_{,,}$, $S_{,,}$ der verlangten Berührungspuncte mittels der Tangenten $P_{,,}R_{,,}$, $P_{,,}S_{,,}$, und hat nun noch ihre wahren Lagen R,S zu projiciren, was auf folgendem Wege geschehen kann. Der Schnitt X der $P_{,,}S_{,,}$ und OX ist die H=Spur der Tangente PS, also pX ihre H=Projection und s (wo pX von der auf OX senkrechten $S_{,,}v$ getroffen wird) die H=Projection von S; die V=Projection s′ ergiebt sich in x′p′ nach §. 37. Eben so wird man die Projectionen des zweiten Berührungspuncts R finden, wenn die H=Spur der Tangente PR eine günstigere Lage hat als in Fig. 38, wo $P_{,,}R_{,,}$ die XO erst in großer Entfernung schneidet. Hier umgeht man diese Spur durch Benützung der Sehne RS. Die H=Spur der (verlängerten) RS ist Z; ihre H=Projection Zs.. wird von $R_{,,}r$ ($\perp$OX) in der H=Projection r des Punctes R geschnitten, dessen V=Projection r′ in z′s′.. liegen muß.

Nachdem auf diese Weise die Berührungspuncte gefunden sind, erhält man die Spuren der Berührungsebenen sehr leicht, da man weiß, daß sie durch die gleichnamigen Spuren der GH′ gehen und auf den gleichnamigen Projectionen der nach den Berührungspuncten laufenden Kugelhalbmessern senkrecht stehen müssen.

§. 126.

Aufg. An eine gegebene Drehungsfläche (mit verticaler Axe) eine Berührungsebene zu legen, welche einer gegebenen Ebene E parallel ist.

Aufl. Aus §. 115 (α) ist bekannt, daß die Berührungsebene einer Drehungsfläche senkrecht auf der Meridianebene steht, welche den Berührungspunct enthält. Führt man daher durch die Drehungsaxe eine Ebene M senkrecht zur gegebenen Ebene E, projicirt den Schnitt L der M und E, zeichnet die V-Projection des in der Ebene M liegenden Meridians (§. 110) und zieht an diesen Meridian eine Tangente T parallel mit L, so geht die gesuchte Ebene durch T und berührt die Drehungsfläche in demselben Puncte, in welchem T den Meridian berührt.

Dabei wurde der Allgemeinheit wegen vorausgesetzt, die gegebene Erzeugende der Fläche sei von der Meridiancurve verschieden. Ist aber als Erzeugende ein Meridian gegeben, so braucht man die V-Projection des in M liegenden Meridians nicht besonders zu zeichnen; vielmehr wird man die Ebene M mit der in ihr liegenden Geraden L durch Drehung in die Ebene des gegebenen Meridians fallen lassen, hier die Tangente parallel mit der neuen Lage der L ziehen, und hierauf die M in ihre erste Lage zurückbringen.

§. 127.

An eine Kegel- oder Cylinderfläche eine Berührungsebene durch eine beliebig gegebene Gerade oder parallel mit einer gegebenen Ebene zu legen, ist im Allgemeinen unmöglich.

Sechstes Kapitel.

Schnitte krummer Flächen durch Linien, Ebenen und krumme Flächen.

§. 128.

Die Puncte, in denen eine Gerade eine krumme Fläche schneidet, findet man, wenn man die Figur construirt, nach welcher eine projicirende Ebene der Geraden die krumme Fläche schneidet, und dann zusieht, wo die Gerade der Schnittfigur begegnet. Die Bestimmung dieser Puncte kommt also immer auf die Aufgabe zurück: den Schnitt einer krummen Fläche und einer Ebene zu projiciren.

Auf die nämliche Aufgabe kann man zurückgehen, wenn die Schnittpuncte zwischen einer ebenen Curve und einer krummen Fläche gefunden werden sollen. Diese Puncte liegen nämlich dort, wo die gegebene Curve derjenigen Curve begegnet, nach welcher die krumme Fläche von der Ebene der gegebenen Curve geschnitten wird.

Wird aber eine krumme Fläche F von einer gewundenen Curve W geschnitten, so hat man zur Bestimmung der Schnittpuncte die Aufgabe aufzulösen: den Schnitt zweier krummen Flächen zu construiren, deren eine die gegebene Fläche F und deren andere eine projicirende Fläche der Curve W ist. Schneiden sich beide Flächen in der Curve V, so sind diejenigen Puncte, welche V und W gemein haben, die verlangten.

A) Ebene Schnitte krummer Flächen.

§. 129.

Eine stetige krumme Fläche wird von einer Ebene in einer stetigen Curve geschnitten, welche sich aber unter ge-

wissen Verhältnissen in eine oder mehrere Gerade auflösen kann.

In manchen Fällen ist aus der Lage der schneidenden Ebene gegen die krumme Fläche die Natur des Schnittes zum Voraus bekannt und seine Projectionen lassen sich unmittelbar oder doch mit nur geringer Vorbereitung zeichnen. Solche Fälle dienen dann zugleich zur Auflösung anderer, bei denen die schneidende Ebene eine weniger günstige Lage hat. Wird nämlich die Curve X gesucht, in welcher eine krumme Fläche von einer beliebig gegebenen Ebene E geschnitten wird, so sieht man sich nach einem System von Ebenen um, deren Schnitte mit der krummen Fläche unmittelbar projicirt werden können, und zeichnet außer diesen Flächenschnitten auch die geraden Durchschnitte der Hülfsebenen mit der Ebene E. Schneidet nun eine solche Hülfsebene die Fläche F in der Curve y und die Ebene E in der Geraden g, so gehören die Puncte, in welchen y und g sich begegnen, der verlangten Curve X an, und man erhält von dieser auf die angegebene Weise beliebig viele Puncte, wenn man die Lage der Hülfsebene ändert.

Sind einmal die beiden Projectionen der Durchschnittscurve gefunden, so kann man diese Curve selbst in wahrer Gestalt und Größe dadurch erhalten, daß man die Schnittebene in eine Grundebene umklappt, die Lagen einer hinreichenden Anzahl von Curvenpuncten in der Umklappung sucht (§. 50) und stetig verbindet.

§. 130.

Aufg. Den Schnitt einer Drehungsfläche und einer Ebene zu zeichnen.

Aufl. Eine Drehungsfläche wird von jeder zur Axe senkrechten Ebene in einem Parallelkreise geschnitten. Ein System solcher Ebenen wird also hier die in §. 129 genannten Hülfsebenen liefern, wenn die Drehungsfläche

von irgend einer andern Ebene geschnitten werden soll. Dabei nimmt man wieder die HE senkrecht zur Drehungsaxe an; die VE legt man am besten senkrecht zur Schnittebene, weil dann ihre V=Spur sogleich die V=Projection der Schnittcurve enthält und auch die verticale Umklappung der wahren Curve sehr leicht auszuführen ist (§. 50, †); in dem nachfolgenden Beispiele ist aber, um die Allgemeinheit des Verfahrens zu zeigen, die VE in einer andern beliebig gewählten Stellung vorausgesetzt.

Es sei (vw, v′u′w′) die Erzeugende, (o, o′o″) die Drehungsaxe der Fläche, PQR′ die gegebene Schnittebene. Eine horizontale Hülfsebene schneidet die Fläche nach dem Parallelkreise (m′n′, man) und die Ebene PQR′ nach der Geraden (S′b′, sb) [§. 39, ††]; daher sind (a, a′) und (b, b′) zwei Puncte der Curve, in welcher die gegebene Fläche von der Ebene PQR′ geschnitten wird. Andere Paare solcher Puncte erhält man durch Verrückung der horizontalen Ebene S′m′n′, so daß sich die Schnittcurve selbst vollständig construiren läßt. Fig. 39.

In Fig. 39 ist die gegebene Erzeugende zugleich ein Meridian der Fläche, und zwar der Hauptmeridian. Wäre eine andere Erzeugende gegeben, so könnte man die Parallelkreise, nach denen die horizontalen Ebenen die Fläche schneiden, eben so leicht finden (vgl. §. 108) und das übrige Verfahren bliebe ganz dasselbe wie oben.

Als Uebungsbeispiel nehme man zur Erzeugenden der Drehungsfläche eine Gerade, welche mit der Drehungsaxe nicht in einerlei Ebene liegt, und schneide die Fläche durch eine beliebig gewählte Ebene.

§. 131.

Aufg. Den Schnitt einer Cylinder= oder Kegelfläche und einer Ebene zu projiciren.

Aufl. Man zeichnet eine beliebige Anzahl von Mantellinien der Fläche (§§. 98, 102), bestimmt für jede ein=

zelne den Punct, wo sie die gegebene Ebene trifft (§. 40), und legt durch die gleichnamigen Projectionen der gefundenen Puncte stetige Curven; diese sind die Projectionen des verlangten Schnittes.

§. 132.

Die Cylinderflächen und Kegelflächen sind entwickelbar, d. h. sie lassen sich ohne Riß und Falte in eine Ebene auseinanderbreiten.

Ist auf einer solchen Fläche irgend eine Curve gezeichnet, so geht diese nach der Entwicklung in eine andere (ebene) Curve über, welche die Verwandelte der ersten heißt.

Man kommt öfters in den Fall, ein durch zwei Ebenen begrenztes Stück einer Cylinder- oder Kegelfläche entwickeln zu müssen, wobei dann auch die Verwandelten der beiden Curven zu zeichnen sind, nach denen die Fläche von jenen Begrenzungsebenen geschnitten wird.

Schneidet man irgend eine Cylinderfläche senkrecht zu den Mantellinien, so verwandelt sich nach dem Entwickeln die Schnittcurve in eine gerade Linie.

Wird ein Drehungs-Kegel entwickelt, so verwandelt sich jeder Parallelkreis in einen Kreisbogen, dessen Halbmesser die Entfernung der Kegelspitze von der Peripherie des Parallelkreises ist.

§. 133.

Aufg. Eine Cylinderfläche, deren Leitende in der HE liegt und deren Erzeugende senkrecht auf der HE steht, werde durch eine Ebene POQ′ geschnitten; man verlangt die Figur des Schnittes und seine Verwandelte.

Fig. 40. **Aufl.** Legt man die VE senkrecht zur Schnittebene, so fällt die V-Projection v′w′ der Schnittcurve in die V-Spur OQ′ der Schnittebene und die H-Projection in

die H-Spur vbw der Cylinderfläche. Die Gestalt $V_1 A_1 B_1 \ldots$ des Schnittes ergiebt sich hiernach leicht durch Umklappung.

Entwickelung.

Da in dem gewählten Beispiele die Flächenspur eine geschlossene Curve ist, so muß der Cylinder vor der Entwickelung aufgeschnitten werden, und dieß möge längs der Mantellinie Vv geschehen. Eine Anzahl anderer Mantellinien ziehe man durch beliebige Puncte a,b,c,.... der Curve vbc.. und zeichne ihre V-Projectionen 1a′, 2b′, 3c′,.... — Im Anfangspunct v einer Geraden $v v_0$ errichte man auf ihr die Senkrechte vV=mv′; dann trage man von v aus auf der Geraden die rectificirte Länge der Curve vcwhv ab (§. 92), und zwar so, daß va = arc. va, vb = arc. vb, vc = arc. vc, ..., vv_0 = arc. vcwhv. Zieht man hierauf durch die Puncte a, b, c, ..., v_0 Senkrechte aA, bB, ... zu vv_0, macht aA = 1a′, bB = 2b′, cC = 3c′, ..., v_0V_0 = m′v′, und legt durch die Puncte V,A,B,C, ..., V_0 eine stetige Curve, so stellt diese die Verwandelte der Schnittcurve (vcwv, v′w′) vor; die ebene Figur aber, welche die Geraden vv_0, vV, v_0V_0 und die Curve VAB..V_0 zu Grenzen hat, ist die Entwickelung des zwischen der HE und der Ebene POQ′ enthaltenen Cylinderstücks.

Die oben angegebenen Constructionen gelten allgemein für jede beliebige Gestalt der Curve vcw, können sich aber in besondern Fällen vereinfachen; so namentlich in Fig. 40, wo vcwv ein Kreis vom Durchmesser vw ist. Dort wählt man am besten die Puncte a,b,c,... so, daß sie die Kreisperipherie in eine Anzahl gleicher Theile, z. B. in 12, theilen; dann macht man $vv_0 = \frac{22}{7}$ vw (§. 92) und theilt vv_0 in 12 gleiche Theile, wodurch sich die (den Puncten a, b, c... entsprechenden) Puncte a, b, c... ergeben.

§. 134.

Aufg. Ein Drehungskegel (von welchem man nur den einen Mantel vorhanden denkt), wird von

einer Ebene geschnitten, welche zu keiner der Mantellinien parallel ist. Man verlangt die Figur des Schnittes und die Verwandelte desselben.

Aufl. Man lege die HE senkrecht zur Axe des Kegels und die VE senkrecht zur Schnittebene.

Da die Schnittebene PQR′ mit keiner Mantellinie
Fig. 41. parallel sein soll, mithin von allen wirklich getroffen wird, so ist die Schnittcurve nothwendig in sich geschlossen. Ihre V=Projection ist v′w′. Ihre H=Projection kann auf doppelte Weise gefunden werden, je nachdem man die Ebenen der (in §. 129 erwähnten) Hülfsschnitte durch die Spitze oder senkrecht zur Axe des Kegels legen will. Im ersten Falle sucht man die H=Projectionen $U_1\,o$, $U_2\,o$ zweier Mantellinien, deren gemeinschaftliche V=Projection s′u′ beliebig angenommen wurde, und hierauf die H=Projectionen a_1, a_2 der in a′ v=projicirten Puncte, wo jene Mantellinien der Ebene PQR′ begegnen; die erhaltenen Puncte (a', a_1), (a', a_2) liegen auf der gesuchten Schnittcurve, und man kann deren auf die erklärte Art beliebig viele finden. Im zweiten Falle projicirt man einen beliebigen Parallelkreis $(h'i', a_1\,ia_2 ..)$ und die Gerade $(a', a_1 a_2)$, nach welcher seine Ebene die PQR′ schneidet; die Begegnungspuncte (a_1, a'), (a_2, a') der Geraden und des Parallelkreises gehören der Schnittcurve an.

Die wahre Figur des Schnittes findet man nun durch verticale Umklappung der Ebene PQR′. (§. 50, †).

Entwicklung.

Die Entwickelung des von der Spitze bis zur HE reichenden und nach der Mantellinie SN aufgeschnittenen Kegelstücks liefert einen Kreissector, dessen Bogen die Verwandelte der horizontalen Kegelspur $MU_1\,N$.. vorstellt. Der Halbmesser SN dieses Bogens hat die Länge s′n′ und heiße R; der rectificirte Bogen ist der Rectification

des Kreises $MU_1 N..$ (dessen Halbmesser durch R bezeichnet sein möge) gleich; seine Endpuncte $\mathfrak{N}, \mathfrak{N}_0$ können also entweder auf die zu Ende des §. 92 angegebene Weise gefunden werden (wobei man am besten thut, nur $\frac{1}{n}$ des Kreises $MU_1 N..$ zu rectificiren, ein der Rectification gleiches Stück auf der Periperie des Kreises $\mathfrak{N}\mathfrak{U}_1..$ abzutragen und dieses Stück nmal zu nehmen), oder dadurch, daß man den Centriwinkel $\mathfrak{N}\mathfrak{S}\mathfrak{N}_0 = \varphi$ des Sectors $\mathfrak{N}\mathfrak{S}\mathfrak{N}_0\mathfrak{N}$ unmittelbar (mit Hülfe eines Maßstabes und Transporteurs) aus der Gleichung.

$$\varphi = 360^0 . \frac{R}{\mathfrak{R}}$$

sucht, deren Richtigkeit einleuchtet, wenn man bemerkt, daß die ganzen Periphherien der Kreise $\mathfrak{N}\mathfrak{N}_0...$ und $MU_1N..$ sich $= \mathfrak{R} : R$ verhalten und der (dem Kreise $MU_1N..$ gleiche) Bogen $\mathfrak{N}\mathfrak{N}_0$ zu der Peripherie seines Kreises im Verhältniß von $\varphi : 360^0$ steht.

Hat man irgend eine bestimmte Mantellinie $(oU_2, s'u')$ des Kegels in der Entwickelung anzugeben, so macht man arc. $\mathfrak{N}_0\mathfrak{U}_2 =$ arc. NU_2 und zieht $\mathfrak{S}\mathfrak{U}_2$. — In Fig. 41 sind die Mantellinien, welche man zur Bestimmung der Schnittcurve anwandte, so gewählt, daß ihre H-Spuren den Kreis $MU_1N..$ in 12 gleiche Theile theilen; man erhält daher ihre Lagen in der Entwickelung, wenn man den Bogen $\mathfrak{N}\mathfrak{N}_0$ in 12 gleiche Theile theilt und die Theilpuncte mit $\mathfrak{S}$ verbindet.

Um den Punct (a_2, a') der Schnittcurve in der Entwickelung wieder zu finden, trägt man auf $\mathfrak{S}\mathfrak{U}_2$ von $\mathfrak{S}$ nach $\mathfrak{A}_2$ das Stück $(oa_2, s'a')$ ab, dessen wahre Länge$=s'h'$ ist. Auf diese Art kann man alle projicirten Puncte des Schnittes in die Entwickelung übertragen, und dann durch stetige Verbindung der erhaltenen Lagen die Verwandelte $\mathfrak{W}\mathfrak{V}\mathfrak{W}_0$ der Schnittcurve zeichnen.

B) Gegenseitiger Durchschnitt zweier krummen Flächen.

§. 135.

Der Schnitt zweier krummen Flächen ist in den allermeisten Fällen eine gewundene Curve, welche in sich geschlossen sein oder in's Unendliche laufen kann, öfters auch aus mehreren getrennten Aesten besteht.

In Bezug auf die Art des Durchschneidens zweier krummen Flächen (oder zweier von krummen Flächen begrenzten Körper) lassen sich dieselben Unterscheidungen machen wie in §. 82 für Polyeder-Schnitte; es kann nämlich das Schneiden entweder ein Eindringen der einen Fläche in die andere, oder ein Durchdringen, oder ein gegenseitiges Ausschneiden sein.

§. 136.

Zur Bestimmung des Schnittes X irgend zweier krummen Flächen F_1,F_2 bedient man sich eines Systems von Hülfsflächen, welche gegen die gegebenen in solchen Beziehungen stehen, daß ihre Schnitte mit letzteren unmittelbar angegeben werden können. Diese Hülfsflächen müssen daher immer von möglichst einfacher Natur sein; wo es angeht, nimmt man Ebenen dafür, außerdem meist Kugeln, Cylinder oder Kegel. Schneidet eine solche (ebene oder krumme) Hülfsfläche H die gegebenen Flächen F_1,F_2 in den Linien f_1, f_2, so liegen die Puncte, welche f_1 mit f_2 gemeinschaftlich hat, auf der gesuchten Schnittcurve X; je öfter man dann die Lage der H ändert, um so mehr Puncte der X erhält man.

Für die Darstellung der Curve X ist die Wahl des Grundsystems nicht gleichgiltig, indem von der Lage desselben in vielen Fällen die Möglichkeit einfacher Hülfsschnitte abhängt

§. 137.

Aufg. Den Schnitt zweier Cylinderflächen C und 𝔈 zu finden.

Aufl. Ein Cylinder wird durch eine zur Erzeugenden parallele Ebene nach einer oder mehreren Geraden geschnitten. Daher muß eine Ebene, welche den Erzeugenden der beiden gegebenen Cylinderflächen zugleich parallel ist, jede von den Flächen nach Geraden schneiden, Fig. 42. und die gegenseitigen Schnittpuncte dieser Geraden liegen auf der gesuchten Schnittcurve.

Es seien VGW und 𝔙𝔊𝔚 die Leitenden (zugleich die H=Spuren) der gegebenen Flächen C und 𝔈; (Vx, v′x′) eine Mantellinie der ersten, (Kb$_1$, k′b^{I}) eine Mantellinie der zweiten. Legt man durch einen beliebigen Punct (x, x′) in (Vx, v′x′) eine Parallele zu (Kb$_1$, k′b^{I}) und bestimmt ihre H=Spur Z, so ist VZ die H=Spur einer Ebene E, welche den Erzeugenden beider Cylinderflächen parallel ist (vgl. §. 43). Diese Ebene schneidet die Fläche C in den Mantellinien (Vx, v′x′), (Wa$_4$, w′a^{IV}) und die Fläche 𝔈 in (𝔙a$_1$, 𝔳′a^{I}), (𝔚a$_2$, 𝔴′a^{II}); daher gehören die vier Puncte (a$_1$, a^{I}), (a$_2$, a^{II}), (a$_3$, a^{III}), (a$_4$, a^{IV}), in denen sich jene zwei Paare von Mantellinien begegnen, der Schnittcurve an (und man hat zugleich aus §. 7 eine Genauigkeitsprobe). Durch mehrmaliges paralleles Verrücken der H=Spur VZ𝔚 erhält man beliebig oft vier neue Puncte der Curve.

Dieses Verrücken der V𝔚 hat aber seine Grenzen; denn da die Ebene E, deren Spur sie ist, immer beiden Cylindern begegnen soll, so muß die V𝔚 auch die beiden Cylinderspuren treffen, und ihre äußersten Lagen sind mithin diejenigen, von denen jede die eine Cylinderspur berührt und die andere schneidet, in Fig. 42 also die Linien GH und KL. Die beiden Lagen der Hülfsebene E, welche den Spuren GH und KL entsprechen, heißen Grenzebenen, und zwischen ihnen sind alle brauchbaren

Lagen der Hülfsebene eingeschlossen; die Linien GH und KL mögen Spurgrenzen heißen.

Aus der Lage der Spurgrenzen ist sogleich abzusehen, von welcher Art der Durchschnitt beider Cylinderflächen sein muß. Berühren nämlich diese Spurgrenzen, wie in Fig. 42, nicht eine und dieselbe Cylinderspur, so sieht man, daß ein Stück des Cylinders C gar nicht vom andern Cylinder 𝔈 erreicht wird (nämlich das Stück, dessen H-Spur der Bogen KL ist), und daß eben so auch ein Stück des Cylinders 𝔈 nicht vom ersten erreicht wird; deshalb findet zwischen diesen beiden Cylindern ein gegenseitiges Ausschneiden statt und die Schnittcurve besteht aus einem einzigen geschlossenen Aste. Würden dagegen die Spurgrenzen beide die Spur VGW berühren und die Spur 𝔙𝔊𝔚 schneiden, so müßte der Cylinder C den Cylinder 𝔈 durchbringen und die Schnittcurve bestände aus zwei getrennten Aesten. *)

Die Schnittcurve muß die durch K und L gehenden Mantellinien des Cylinders C berühren, und eben so die durch 𝔊 und 𝔋 gehenden Mantellinien des Cylinders 𝔈; denn sie hat mit jeder solchen Mantellinie einen Punct gemein, und liegt übrigens ganz diesseits derselben. Mit der Bestimmung dieser Berührungspuncte (b_1, b^I), (b_2, b^{II}), (c_1, c^I), (c_2, c^{II}) wird am besten die Zeichnung der Curve begonnen; hierauf sucht man in jeder Grundebene diejenigen Puncte der Curvenprojection, welche auf den gleichnamigen Umrissen der Cylinder liegen und in denen die Projection den betreffenden Umriß berühren muß. Aus diesen wenigen Puncten ist im Allgemeinen schon der Lauf der Curve zu erkennen, und es läßt sich dann leicht beurtheilen, an welchen Orten man noch weitere Punkte zu bestimmen nöthig hat.

†) In Beziehung auf das Ausziehen der proji-

---

*) Inwiefern zeigen die Spurgrenzen es sogleich an, wenn die gegebenen Cylinder sich gar nicht begegnen? Wie verhält es sich, wenn eine von den Spurgrenzen beide Cylinderspuren berührt? Wie, wenn jede Spurgrenze eine gemeinschaftliche Tangente beider Cylinderspuren ist?

cirten Mantellinien ist zu bemerken, daß auch solche, welche auf dem an sich sichtbaren Theile des einen Cylinders liegen, theilweise unsichtbar werden können, indem der andere Cylinder Stücke derselben verdeckt. Was für Stücke zu punctiren sind, läßt sich am besten ermessen, wenn man vorher bestimmt hat, welche Puncte der Schnittcurve sichtbar und welche unsichtbar sind. Ein Punct der Schnittcurve kann aber nur dann sichtbar sein, wenn von den beiden Mantellinien, durch deren Schnitt er entstanden ist, jede auf ihrem eigenen Cylinder (ohne Vorhandensein des andern) ganz sichtbar wäre; ein Punct dagegen, in welchem sich eine sichtbare und eine unsichtbare oder zwei unsichtbare Mantellinien schneiden, ist verdeckt, weil er bezüglich des einen oder beider Cylinder auf dem unsichtbaren Theile liegt.

§. 138.

Aufg. Den Schnitt zweier Kegelflächen zu projiciren.

Aufl. Die Kegel seien durch ihre H=Spuren und ihre Spitzen gegeben.

Läßt man um eine Gerade, welche die Spitzen S, T beider Kegel verbindet, eine Ebene E sich drehen, so schneidet jede Lage dieser Ebene sowohl den einen als den andern Kegel nach geraden Linien, und die gegenseitigen Durchschnitte derselben sind Puncte der gesuchten Schnittcurve.

Wenn E in solche Lage kommt, daß sie den einen Kegel berührt und den andern schneidet, so heißt sie eine Grenzebene. Aus den Lagen der Grenzebenen ist (wie in §. 137) die Art des Durchschnitts der gegebenen Flächen zu erkennen. Die H=Spuren der sämmtlichen Lagen von E gehen durch die H=Spur R der ST..; die H=Spuren der Grenzebenen (die Spurgrenzen) erhält man also, wenn man durch R Gerade legt, deren

jede die Spur des einen Kegels berührt und die Spur des andern schneidet. Sind die Spurgrenzen Tangenten einer und derselben Kegelspur, so ist der Schnitt beider Kegel ein Durchdringen (und zwar dringt derjenige Kegel, dessen Spur von den Spurgrenzen berührt wird, durch den andern), wobei die Schnittcurve aus getrennten Aesten besteht. Wenn von den Spurgrenzen jede eine andere Kegelspur berührt, so schneiden die Flächen sich gegenseitig aus.

†) Um zu finden, welche Theile der Figur ausgezogen und welche punctirt werden müssen, hält man sich an dieselbe Regel, welche in §. 137, † für einen verwandten Fall aufgestellt wurde.

§. 139.

Aufg. Den Schnitt einer Cylinderfläche nnd einer Kegelfläche zu projiciren.

Aufl. Die hier anzuwendenden Hülfsebenen werden durch die Spitze des Kegels parallel zur Erzeugenden des Cylinders gelegt und gehen demnach alle durch die Gerade, welche man durch die Kegelspitze parallel zur Erzeugenden des Cylinders ziehen kann. Jede solche Ebene schneidet sowohl den Kegel als den Cylinder nach Geraden. Im Uebrigen wird die Aufgabe fast ganz so be-
Fig. 43. handelt, wie die in §. 137 und §. 138.

§. 140.

Aufg. Man verlangt den Schnitt einer Drehungsfläche und einer Kegelfläche, welche ihre Spitze in der Drehungsaxe hat.

Aufl. Die HE lege man senkrecht zur Axe (s, o′s′) der Drehungsfläche, deren Hauptmeridian (mn, m′o′n . .) sein soll; ferner sei PUVW die H-Spur und (s,s′) die Spitze der Kegelfläche. Die Drehungsfläche ist hier eine vollkommen geschlossene und die Kegelspitze liegt innerhalb

derselben; deshalb kommt jeder Mantel des Kegels mit der Drehungsfläche zum Durchschnitt. Um aber eine übersichtliche Zeichnung zu erhalten, soll der obere Mantel des Kegels ganz weggelassen und von der Drehungsfläche auch nur ein Stück als vorhanden gedacht werden, dessen Grenze der Parallelkreis (nlm, n′m′) sein möge.

In die Ebene des Hauptmeridians fallen zwei Mantellinien (Vs, v′s′), (Ws, w′s′) des Kegels; die Puncte (a′,a), (b′,b), welche diese mit dem Hauptmeridian gemein haben, gehören zur gesuchten Schnittcurve, und in a′, b′ berührt die V=Projection dieser Curve den verticalen Umriß der Drehungsfläche. Um den Punct der Curve zu erhalten, dessen V=Projection auf der Linie u′s′ des vertikalen Kegelumrisses liegt, drehe man die der Mantellinie US entsprechende h=projicirende Ebene, welche zugleich eine Meridianebene der Drehungsfläche ist, bis zum Zusammenfallen mit der Hauptmeridianebene; dadurch kommt die Mantellinie in die Lage (U_0s, u^0s′) und schneidet den Hauptmeridian in einem Puncte, dessen V=Projection c^0 ist; bei Zurückbewegung des Meridians in seine erste Stellung rückt dieser Punct nach (c′, c), wo er der gesuchten Curve angehört. Durch das nämliche Verfahren findet man nicht nur den Punct (d′, d), dessen V=Projection auf die zweite Linie r′s′ des verticalen Kegelumrisses fällt, sondern überhaupt beliebig viele Puncte der Schnittcurve. Dabei dient es zur Abkürzung der Construction, wenn man die Mantellinien des Kegels immer paarweise zusammennimmt, nämlich je zwei solche, deren H=Spuren gleiche Entfernung von s haben, wie SP und SQ; denn man sieht leicht, daß diese beiden nach vorgenommener Drehung der durch sie gehenden Meridianebenen einerlei V=Projection erhalten.

Wäre statt eines Stücks der Drehungsfläche die ganze Fläche beibehalten worden, so hätte man die H=Projection der Schnittcurve und die Stücke sa, sc, ... der h=projicirten Mantellinien punctiren müssen. Wollte man ferner die Schnittfigur voll-

ständig haben, so wären, nachdem der Hauptmeridian ganz angegeben worden ist, die einzelnen Mantellinien des Kegels über die Spitze hinauf zu verlängern, und eben so die V-Projectionen ihrer gedrehten Lagen; dadurch würde sich ein zweiter Curvenast ergeben.

§. 141.

Aufg. Man sucht den Schnitt einer Drehungsfläche und eines Cylinders, dessen Richtlinie der Axe der Drehungsfläche parallel ist.

Aufl. Nimmt man die HE senkrecht zur Drehungsaxe an, so ist die H-Spur der Cylinderfläche zugleich die H-Projection der verlangten Schnittcurve. Die Ebene eines beliebigen Parallelkreises schneidet die Cylinderfläche in einer Curve, deren H-Projection gleichfalls mit der horizontalen Cylinderspur zusammenfällt. Da, wo diese Spur die H-Projection jenes Parallelkreises trifft, hat man also die H-Projectionen von Puncten der gesuchten Durchschnittscurve; die zugehörigen V-Projectionen ergeben sich mit Hülfe von Senkrechten zum Grundschnitt. Benützt man in dieser Weise mehrere Parallelkreise, so erhält man eine zureichende Anzahl von Puncten, um die V-Projection der Durchschnittscurve zeichnen zu können.

Die Ebenen der Hülfsschnitte könnte man auch durch die Drehungsaxe legen und (wie in der vorhergehenden Aufgabe) in die Ebene des Hauptmeridians bewegen. Doch ist das oben gelehrte Verfahren bequemer.

§. 142.

Fig. 44. **Aufg.** Man sucht den Schnitt einer Drehungsfläche und einer Kegelfläche, deren Spitze nicht in der Drehungsaxe liegt.

Aufl. Bei verticaler Stellung der Drehungsaxe (o,o′o″) sei (vw, v′o″w′..) der Hauptmeridian der Drehungsfläche, PRQT die H-Spur des Kegels, (s, s′) seine Spitze.

Um diejenigen Puncte der verlangten Schnittcurve zu finden, welche auf einen beliebig gewählten Parallel-

kreis (m′n′, man) fallen, nehme man diesen Kreis zur Leitenden eines Hülfskegels, welcher mit dem gegebenen die Spitze (s,s′) gemein hat und letzteren also nach Geraden schneiden muß. Der verticale Umriß des Hülfskegels besteht aus den Geraden s′m′k′, s′n′l′; seine H=Spur ist ein Kreis vom Durchmesser k′l′, welcher als Mittelpunct die H=Spur Z der von (s,s′) nach dem Mittelpuncte (o, o′) des Parallelkreises gezogenen Geraden (so, s′o′) hat. Beide Kegelspuren schneiden sich in P und Q; daher gehören die Mantellinien (Ps, p′s′), (Qs, q′s′) den beiden Kegeln gemeinschaftlich zu, und die Puncte (a,a′), (b,b′), wo diese Mantellinien dem Parallelkreise MN begegnen, liegen zugleich auf der gegebenen Drehungsfläche, mithin auf der verlangten Schnittcurve.

Indem man nach und nach den Parallelkreis MN in andere Lagen bringt, ergeben sich auf die vorbeschriebene Weise beliebig viele Puncte der Schnittcurve.

†) Die obige Auflösung ist ganz allgemein. Ist aber die H=Spur des gegebenen Kegels ein Kreis, so werden die Hülfskegel entbehrlich und können durch Hülfsebenen ersetzt werden, welche zur HE parallel liegen. Eine solche Ebene schneidet nämlich die Drehungsfläche nach einem Parallelkreise und den gegebenen Kegel ebenfalls nach einem Kreise, der sich auf die HE leicht projiciren läßt; die gemeinsamen Puncte beider Kreise sind Puncte der gesuchten Schnittcurve.

§. 143.

Aufg. Den Schnitt einer Drehungsfläche und einer Cylinderfläche zu projiciren, deren Erzeugende zur Drehungsaxe nicht parallel ist.

Aufl. Man betrachte (bei verticaler Stellung der Axe) einen beliebigen Parallelkreis MN der Drehungsfläche als Leitende eines Hülfscylinders, dessen Erzeugende parallel mit der Erzeugenden des gegebenen Cylinders läuft.

Dieser Hülfscylinder schneidet den gegebenen nach Geraden, deren Schnittpuncte mit dem Parallelkreise MN der gesuchten Schnittcurve angehören, so daß sich die gegenwärtige Aufgabe ganz ähnlich wie die vorige behandeln läßt.

†) Ist die Spur des gegebenen Cylinders auf der zur Drehungsaxe senkrechten HE ein Kreis, so hat man die Hülfscylinder nicht nöthig. (Vgl. §. 142, †).

††) Hat die Richtlinie des gegebenen Cylinders eine zur Drehungsaxe senkrechte Lage, so gehen die Hülfscylinder in Hülfsebenen über.

§. 144.

Zwei Drehungsflächen, welche eine gemeinschaftliche Axe haben, können sich nur nach Parallelkreisen schneiden; denn eine zur Drehungsaxe senkrechte Hülfsebene schneidet beide Flächen nach concentrischen Kreisen, welche also, wenn sie nicht ganz ineinander fallen, gar keinen Punct gemein haben.

§. 145.

Aufg. Die Durchschnittscurve zweier Drehungsflächen, deren Axen sich schneiden, soll gefunden werden.

Aufl. Hier wendet man zur Auffindung der Durchschnittscurve sphärische Hülfsflächen an. Es schneidet nämlich eine Kugel, deren Mittelpunct in der Axe einer Drehungsfläche liegt, die letztere Fläche nach einem Parallelkreise (§. 144); wählt man also für den Kugelmittelpunct den Punct, wo die Axen zweier Drehungsflächen sich begegnen, so wird jede von beiden Flächen nach einem Parallelkreise geschnitten, und die gemeinschaftlichen Puncte der zwei Parallelkreise liegen auf der Schnittcurve der gegebenen Flächen.

Zu leichterer Bestimmung solcher Puncte legt man die HE senkrecht zu der einen Drehungsaxe und die VE parallel zu beiden Axen. Unter dieser Voraussetzung

seien (o,o′o″) und (oX, o″x′) die Drehungsaxen, u′v′t′.. Fig. 45.
und g′k′h′.. die verticalen Umrisse zweier Drehungsflächen. Ein Kreis m′k′n′l′, um o″ mit beliebigem Halbmesser beschrieben, stellt den verticalen Umriß einer Kugel vom nämlichen Halbmesser vor, welche ihren Mittelpunct im Schnitte (o, o″) beider Axen hat, und die gegebenen Flächen nach Parallelkreisen schneidet, deren V=Projectionen die Geraden m′n′, k′l′ sind; daher ist a′ die gemeinschaftliche V=Projection zweier Puncte der Curve, in welcher sich die Drehungsflächen schneiden; die zugehörigen H=Projectionen a_1, a_2 findet man, nachdem die H=Projection $ma_1 n$.. des horizontalliegenden Parallelkreises MN gezeichnet worden ist.

Um für die Schnittcurve andere Paare von Puncten zu erhalten, giebt man der Hülfskugel andere Halbmesser.

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

Druckfehler.

Seite	17	Zeile	7 v. o.	lies der statt den.
=	=	=	19 = =	= $\left\{\begin{matrix}V\\ H\end{matrix}\right\}$ = $\left\{\begin{matrix}H\\ V\end{matrix}\right\}$
=	20	=	8 v. u.	fehlt nach bestimmen ein Comma.
=	20	=	12 = =	ist das Wort beliebige zu streichen.
=	42	=	4 = =	lies Dodekaederecken statt Dodekaeder-decken.
=	77	=	11 v. o.	lies Linien statt Linie.
=	96	=	7 v. u.	= m'o'n' = mon.

Im Verlage von **J. L. Schrag in Nürnberg** sind nachstehende Lehr- und Hülfs-Bücher für technische Anstalten, Kunst-, Gewerbs- und Handlungs-Schulen erschienen, und durch alle Buchhandlungen zu haben:

Accum, F., chemische Belustigungen. Eine Sammlung auffallender und lehrreicher Versuche, aus dem Gebiete der Experimental-Chemie. Nach der 3ten englischen Ausgabe mit Zusätzen bearbeitet von dem Verfasser. Mit 2 Kupfertafeln. gr. 8. (17 B.) 1 Thlr. 16 gr. oder 3 fl.

Ahrens, Dr. J. T., Lehrbuch der Geometrie zum Gebrauche in gelehrten Schulen und andern höhern Bildungsanstalten. In 2 Abtheilungen, I) Ebene Geometrie. II) Körperliche Geometrie. Mit 11 Steindrucktafeln. gr. 8. (25 1/2 B.) 1 Thlr. oder 1 fl. 48 kr.

Berthier, P., Handbuch der Probirkunst auf trocknem Wege. Deutsch bearbeitet von C. Hartmann. Mit 13 lithogr. Tafeln. 8. (57 B.) 4 Thlr. oder 7 fl. 12 kr.

Berzelius, J., die Anwendung des Löthrohrs in der Chemie und Mineralogie. 4te vermehrte und verbesserte Auflage. Mit 4 Kupfertafeln. gr. 8. 1844.

Buchner's, J. A., Grundriß der Physik, als Vorbereitung zur Chemie, Naturgeschichte und Physiologie. Zweite Auflage. Mit 13 Kupfertafeln und 16 Tabellen. (36 1/4 B.) 2 Thlr. 12 gr. oder 3 fl. 45 kr.

— — — — dessen Grundriß der Chemie. 3 Theile. gr. 8. (165 B.) 5 Thlr. oder fl. 9. —

Buff, Dr. H., Lehrbuch der Stöchiometrie. Ein Leitfaden zur Kenntniss und Anwendung der Lehre von den bestimmten chemischen Proportionen. 2te umgearbeitete Auflage. gr. 8. 1842. 18 gr. oder fl. 1. 12 kr.

— — Grundzüge des chemischen Theils der Naturlehre. Zum Gebrauche für Vorlesungen, so-

wie zum Selbstunterrichte bearbeitet. Mit 77 eingedruckten Holzschnitten. gr. 8. (24 1/2 B.) 2 Thlr. 3 gr. oder 3 fl. 36 kr.

Dumas, J., Handbuch der angewandten Chemie. Ein nöthiges Hülfsbuch für technische Chemiker, Künstler, Fabrikanten und Gewerbtreibende überhaupt; aus dem Französischen übersetzt von G. Alex und F. Engelhart. Die 5 fertigen Bände mit 75 Kupfertafeln kosten herabgesetzt 15 Thlr. oder 26 fl. 16 kr. Der sechste Band übersetzt von Dr. L. A. Buchner jun. erscheint in Lieferungen zu 10 Bogen a 16 gr. oder 1 fl. 12 kr.

Du Mênil, Dr. A. J., treuer Wegweiser für arbeitende Chemiker und Freunde der analytischen Chemie. gr. 8. (6 B.) 1842. 12 gr. oder 54 kr.

Fuchs, J. N., über ein neues nutzbares Product aus Kieselerde und Kali (Wasserglas) gr. 8. In Umschlag 9 gr. oder 30 kr.

Glocker, E. F., Grundriß der Mineralogie mit Einschluß der Geognosie und der Petrefactenkunde. Eine gedrängte Uebersicht der ganzen Wissenschaft, mit vollständiger Benützung der neuesten Entdeckungen. Für höhere Lehranstalten und zum Privat-Gebrauch. Mit 8 Kupfertafeln. 8. (64 B.) 2 Thlr. 6 gr. oder 4 fl. 3 kr.

— — mineralogische Jahreshefte, oder systematischer Bericht über die Fortschritte der Mineralogie, mit Berücksichtigung der Geologie und Petrefactenkunde, 6 Hefte, vom Jahre 1831—1837. 3 Thlr. oder 5 fl. 24 kr.

Gugler, B., Lehrbuch der descriptiven Geometrie. 25 Bogen Text und 11 Kupfert. in einer Mappe. 1841. 1 Thlr. 20 gr. oder 3 fl. 12 kr.

— — dessen Grundzüge einer elementar-geometrischen Theorie der Kreis-Projectionen (Kegelschnitte). Mit 5 Quarttafeln. 1842. 1 Thlr. oder 1 fl. 48 kr.

Heideloff, C., der Tüncher, verbunden mit dem Stuccator, Zimmermaler und Decorateur, für genannte Gewerbe sowohl, als auch für Architekten und Baumeister, insbesondere aber für den

Geschmacksbildenden Theil polytechnischer Anstalten und Gewerbsschulen; nebst einem Anhange über hydraulischen Kalk, anwendbar für Tüncher, vom K. B. Bezirks-Ingenieur Fr. Panzer. Quer Fol. ($4\frac{1}{2}$ Bogen Text.) XIX zum Theil colorirte Kupfertafeln. 1 Thlr. 8 gr. oder 2 fl. 24 kr.

Herrmann, Fr. B. W., die Industrie-Ausstellung zu Paris im Jahre 1839, mit Angabe der Produkte und Addressen der vorzüglichern Aussteller, Nachweisungen über den Zustand der verschiedenen Zweige der Fabrikation, sowie über Ein- und Ausfuhr an Rohstoffen und Manufakten in Frankreich seit 1815, und einem Anhang über technische Unterrichts-Anstalten zu Paris. gr. 8. 1 Thlr. 12 gr. oder 2 fl. 45 kr.

Hollunder, C. F., Versuch einer Anleitung zur mineralurgischen Probir-Kunst auf trocknem Wege. Ein Handbuch für angehende Probirer, rationelle Hüttenleute, Analytiker, Apotheker, Fabrikanten, Metallarbeiter, Technologen und für Freunde der angewandten Natur-Wissenschaften überhaupt. Nach eigenen Erfahrungen und mit Benutzung der neuesten Entdeckungen, 3 Theile. gr. 8. ($67\frac{1}{4}$ B.) 2 Thlr. 12 gr. oder 4 fl. 30 kr.

Kobell, Fr. v., Charakteristik der Mineralien. II Abtheilungen mit 1 Steintafel. gr. 8. (36 B.) 3 Thlr. oder 5 fl.

— — dessen Grundzüge der Mineralogie. Zum Gebrauch bei Vorlesungen, so wie zum Selbststudium entworfen. Mit 4 Steintafeln. gr. 8. ($22\frac{1}{4}$ B.) 2 Thlr.

Herrmann, dessen Grundzüge der Mineralogie. Zum Gebrauche bei Vorlesungen, so wie zum Selbststudium entworfen. Mit 4 auf Stein gravirten Tafeln. gr. 8. ($22\frac{1}{4}$ B.) 2 Thlr. 12 gr. oder 4 fl. 30 kr.

König, Dr. A. K. J., Lehrbuch der Arithmetik, für höhere Bürgerschulen und zum Selbstunterrichte. Zwei Theile. 8. 1 Thlr. 3 gr. oder 1 fl. 48 kr.

Lochner, G. W. K., chronologisch geordneter Ueberblick der deutschen Geschichte vom ersten Erscheinen der deutschen Völker bis auf die Errichtung des deutschen Bundes. Für obere Klassen der lateinischen und Gewerbsschulen. 8. (9½ B.) 12 gr. oder 54 kr.

Meißner, J. K., das Wesentliche des Wechselrechts in Deutschland. Nach den bestehenden Gesetzen und Usancen der vorzüglichsten deutschen Handelsplätze, und anderen authentischen Quellen. 8. (12 B.) 18 gr. oder 1 fl. 12 kr.

Reuter, A. P., Lehrbuch der mathematischen und physikalischen Geographie für Gymnasien. Mit 4 Kupfertafeln. gr. 8. (31 B.) 1 Thlr. 12 gr. oder 2 fl. 45 kr.

Schubert, G. H., Handbuch der Geognosie und Bergbaukunde. gr. 8. 1 Thlr. 12 gr. oder fl. 2. 45 kr.

— — dessen Handbuch der Kosmologie. gr. 8. 1 Thl. oder 1 fl. 48 kr.

Thibault, J. T., Anwendung der Linien-Perspektive auf die zeichnenden Künste, aus dem Nachlasse des Verfassers herausgegeben von seinem Schüler Chapuis, und übersetzt von A. Reindel (Director der K. Kunstschule zu Nürnberg). (20 1/2 Bogen Text.) Mit 54 Kupfertafeln. Royal-Quart. 1834. 9 Thlr. oder 16 fl. 12 kr.

— — dasselbe Werk in einer wohlfeilen Ausgabe. Der Text in 8tav, die Kupfertafeln in kl. Folio in einer Mappe. 3 Thlr. oder 5 fl. 24 kr.

Wolff, J. G., erste Grundlage des rationalen Zeichnungs-Unterrichts, mit 44 Blättern in kl. 4. 16 gr. oder 1 fl. 12 kr.

Lochner, G. W. K., chronologisch geordneter Ueberblick der deutschen Geschichte vom ersten Erscheinen der deutschen Völker bis auf die Errichtung des deutschen Bundes. Für obere Klassen der lateinischen und Gewerbsschulen. 8. (9½ B.) 12 gr. oder 54 kr.

Meißner, J. K., das Wesentliche des Wechselrechts in Deutschland. Nach den bestehenden Gesetzen und Usancen der vorzüglichsten deutschen Handelsplätze, und anderen authentischen Quellen. 8. (12 B.) 18 gr. oder 1 fl. 12 kr.

Reuter, A. P., Lehrbuch der mathematischen und physikalischen Geographie für Gymnasien. Mit 4 Kupfertafeln. gr. 8. (31 B.) 1 Thlr. 12 gr. oder 2 fl. 45 kr.

Schubert, G. H., Handbuch der Geognosie und Bergbaukunde. gr. 8. 1 Thlr. 12 gr. oder fl. 2. 45 kr.

— — dessen Handbuch der Kosmologie. gr. 8. 1 Thl. oder 1 fl. 48 kr.

Thibault, J. T., Anwendung der Linien-Perspektive auf die zeichnenden Künste, aus dem Nachlasse des Verfassers herausgegeben von seinem Schüler Chapuis, und übersetzt von A. Reindel (Director der K. Kunstschule zu Nürnberg). (20½ Bogen Text.) Mit 54 Kupfertafeln. Royal-Quart. 1834. 9 Thlr. oder 16 fl. 12 kr.

— — dasselbe Werk in einer wohlfeilen Ausgabe. Der Text in 8tav, die Kupfertafeln in kl. Folio in einer Mappe. 3 Thlr. oder 5 fl. 24 kr.

Wolff, J. G., erste Grundlage des rationalen Zeichnungs-Unterrichts, mit 44 Blättern in kl. 4. 16 gr. oder 1 fl. 12 kr.

R'
Q
t

Lochner, G. W. K., chronologisch geordneter Ueberblick der deutschen Geschichte vom ersten Erscheinen der deutschen Völker bis auf die Errichtung des deutschen Bundes. Für obere Klassen der lateinischen und Gewerbsschulen. 8. (9½ B.) 12 gr. oder 54 kr.

Meißner, J. K., das Wesentliche des Wechselrechts in Deutschland. Nach den bestehenden Gesetzen und Usancen der vorzüglichsten deutschen Handelsplätze, und anderen authentischen Quellen. 8. (12 B.) 18 gr. oder 1 fl. 12 kr.

Reuter, A. P., Lehrbuch der mathematischen und physikalischen Geographie für Gymnasien. Mit 4 Kupfertafeln. gr. 8. (31 B.) 1 Thlr. 12 gr. oder 2 fl. 45 kr.

Schubert, G. H., Handbuch der Geognosie und Bergbaukunde. gr. 8. 1 Thlr. 12 gr. oder fl. 2. 45 kr.

— — dessen Handbuch der Kosmologie. gr. 8. 1 Thl. oder 1 fl. 48 kr.

Thibault, J. T., Anwendung der Linien-Perspektive auf die zeichnenden Künste, aus dem Nachlasse des Verfassers herausgegeben von seinem Schüler **Chapuis**, und übersetzt von A. **Reindel** (Director der K. Kunstschule zu Nürnberg). (20 1/2 Bogen Text.) Mit 54 Kupfertafeln. Royal-Quart. 1834. 9 Thlr. oder 16 fl. 12 kr.

— — dasselbe Werk in einer wohlfeilen Ausgabe. Der Text in 8vo, die Kupfertafeln in kl. Folio in einer Mappe. 3 Thlr. oder 5 fl. 24 kr.

Wolff, J. G., erste Grundlage des rationalen Zeichnungs-Unterrichts, mit 44 Blättern in kl. 4. 16 gr. oder 1 fl. 12 kr.

R'
Q
t

Lochner, G. W. K., chronologisch geordneter Ueberblick der deutschen Geschichte vom ersten Erscheinen der deutschen Völker bis auf die Errichtung des deutschen Bundes. Für obere Klassen der lateinischen und Gewerbsschulen. 8. (9½ B.) 12 gr. oder 54 kr.

Meißner, J. K., das Wesentliche des Wechselrechts in Deutschland. Nach den bestehenden Gesetzen und Usancen der vorzüglichsten deutschen Handelsplätze, und anderen authentischen Quellen. 8. (12 B.) 18 gr. oder 1 fl. 12 kr.

Reuter, A. P., Lehrbuch der mathematischen und physikalischen Geographie für Gymnasien. Mit 4 Kupfertafeln. gr. 8. (31 B.) 1 Thlr. 12 gr. oder 2 fl. 45 kr.

Schubert, G. H., Handbuch der Geognosie und Bergbaukunde. gr. 8. 1 Thlr. 12 gr. oder fl. 2. 45 kr.

— — dessen Handbuch der Kosmologie. gr. 8. 1 Thl. oder 1 fl. 48 kr.

Thibault, J. T., Anwendung der Linien-Perspektive auf die zeichnenden Künste, aus dem Nachlasse des Verfassers herausgegeben von seinem Schüler Chapuis, und übersetzt von A. Reindel (Director der K. Kunstschule zu Nürnberg). (20 1/2 Bogen Text.) Mit 54 Kupfertafeln. Royal-Quart. 1834. 9 Thlr. oder 16 fl. 12 kr.

— — dasselbe Werk in einer wohlfeilen Ausgabe. Der Text in 8tav, die Kupfertafeln in kl. Folio in einer Mappe. 3 Thlr. oder 5 fl. 24 kr.

Wolff, J. G., erste Grundlage des rationalen Zeichnungs-Unterrichts, mit 44 Blättern in kl. 4. 16 gr. oder 1 fl. 12 kr.

R'
Q
t

Lochner, G. W. K., chronologisch geordneter Ueberblick der deutschen Geschichte vom ersten Erscheinen der deutschen Völker bis auf die Errichtung des deutschen Bundes. Für obere Klassen der lateinischen und Gewerbsschulen. 8. (9½ B.) 12 gr. oder 54 kr.

Meißner, J. K., das Wesentliche des Wechselrechts in Deutschland. Nach den bestehenden Gesetzen und Usancen der vorzüglichsten deutschen Handelsplätze, und anderen authentischen Quellen. 8. (12 B.) 18 gr. oder 1 fl. 12 kr.

Reuter, A. P., Lehrbuch der mathematischen und physikalischen Geographie für Gymnasien. Mit 4 Kupfertafeln. gr. 8. (31 B.) 1 Thlr. 12 gr. oder 2 fl. 45 kr.

Schubert, G. H., Handbuch der Geognosie und Bergbaukunde. gr. 8. 1 Thlr. 12 gr. oder fl. 2. 45 kr.

— — dessen Handbuch der Kosmologie. gr. 8. 1 Thl. oder 1 fl. 48 kr.

Thibault, J. T., Anwendung der Linien-Perspektive auf die zeichnenden Künste, aus dem Nachlasse des Verfassers herausgegeben von seinem Schüler Chapuis, und übersetzt von A. Reindel (Director der K. Kunstschule zu Nürnberg). (20 1/2 Bogen Text.) Mit 54 Kupfertafeln. Royal-Quart. 1834. 9 Thlr. oder 16 fl. 12 kr.

— — dasselbe Werk in einer wohlfeilen Ausgabe. Der Text in 8vo, die Kupfertafeln in kl. Folio in einer Mappe. 3 Thlr. oder 5 fl. 24 kr.

Wolff, J. G., erste Grundlage des rationalen Zeichnungs-Unterrichts, mit 44 Blättern in kl. 4. 16 gr. oder 1 fl. 12 kr.

R'
Q
t

35. 44. 57.

Förster.B

BSB Bayerische StaatsBibliothek
MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Gugler, Bernhard,

Leitfaden für den ersten Unterricht in der descriptiven Geometrie (aus dem größern 'Lehrbuch etc.' des Verfassers ausgehoben, vorzugsweise für den Gebrauch in Gewerbe-Schulen)

Nürnberg 1844

Math.p. 195 gc
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10081897-5